

Entwurf eines adaptiven Zustands-Beobachters

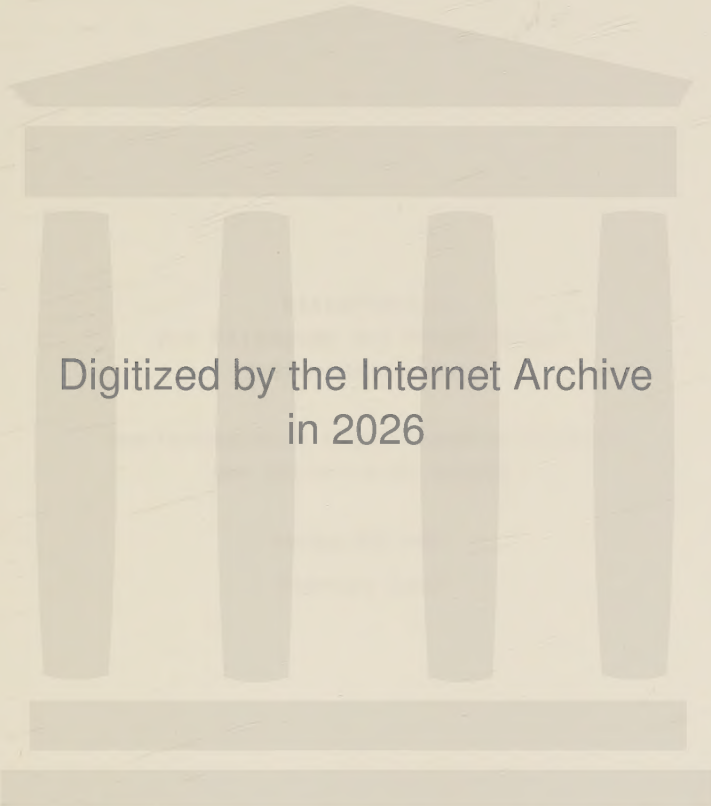
Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs

dem Fachbereich Elektrotechnik/Physik
der Universität Bremen

vorgelegt von
Andreas Suhl

Bremen
1984





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543123_0005

ENTWURF EINES ADAPTIVEN ZUSTANDS-BEOBACHTERS

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs

dem Fachbereich Elektrotechnik/Physik
der Universität Bremen

vorgelegt von
Andreas Suhl

Bremen

1984

Diese Arbeit hat dem Promotionsausschuß Dr.-Ing. der Universität Bremen als Dissertation unter dem Titel "Entwurf eines adaptiven Zustands-Beobachters" vorgelegen.

An dem Promotionsverfahren haben Prof. Dr. G. Ludyk und Prof. Dr. D. Popović als Gutachter mitgewirkt.

Das Kolloquium hat am 27. Juni 1984 stattgefunden.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>Einleitung</u>	0
1. <u>Problemstellung</u>	3
2. <u>Der Proportional-Integral-Beobachter</u>	5
2.1 Strukturbild des PI-Beobachters	12
3. <u>Herleitung des parametrisierten PI-Beobachters</u>	13
3.1 Minimierung des dynamischen Systems $\underline{M}(t)$	16
3.2 Strukturbild des parametrisierten PI-Beobachters	20
3.3 Fehlerdynamik des PI-Beobachters	21
3.3.1 Betrachtung des Zustandsfehlers	21
3.3.2 Betrachtung der Ausgangsfehlers	22
4. <u>Der adaptive Proportional-Integral-Beobachter</u>	24
4.1 Forderung an das Fehlerkriterium sowie Bildung eines adaptiven Gesetzes	25
4.2 Konvergenzanalyse	28
4.3 Konkrete Fehlerkriterien und adaptive Gesetze	37
4.4 Anforderung an die Eingangsgröße $u(t)$	40
4.5 Auswertung des zusätzlich zur Verfügung stehenden Signals $L(t)$	42
4.5.1 Erkennen von Parameter- bzw. Zustandsfehlern bei unzureichender Anregung der Beobachterdynamik $\underline{z}(t)$	42
4.5.1.1 Auslegung der Elemente des Vektors $\hat{\underline{g}}$	46
4.5.2 Rekonstruktion einer konstanten Störung, die auf dem Ausgang des Systems liegt	47
4.5.3 Ermittlung der Systemzustände $\underline{x}(t)$ bei sprungförmiger Störung des Systemausgangs	54
4.5.3.1 Erstes Verfahren	54
4.5.3.1.1 Strukturbild des erweiterten PI-Beobachters	56
4.5.3.2 Zweites Verfahren	57

4.6	Beispiel für die Anwendung des adaptiven PI-Beobachters	59
4.6.1	Modellbeschreibung	59
4.6.2	Vorgabe der Eigenwerte des PI-Beobachters und Auslegung der $\hat{g}$ -Parameter	60
4.6.3	Berechnung der Transformationsmatrizen $\underline{T}_j$	62
4.6.4	Ermittlung der geschätzten Systemzustände $\tilde{\underline{x}}(t)$	63
4.6.5	Simulationsergebnisse	66
5.	<u>Übergang auf die zeitdiskrete Darstellungsweise</u>	71
6.	<u>Zeitdiskretisierung der PI-Beobachters</u>	72
6.1	Strukturbild des PS-Beobachters	77
7.	<u>Herleitung des parametrisierten PS-Beobachters</u>	78
7.1	Minimierung des dynamischen Systems $M(k)$	80
7.2	Strukturbild des parametrisierten PS-Beobachters	82
7.3	Fehlerdynamik des PS-Beobachters	83
7.3.1	Betrachtung des Zustandsfehlers	83
7.3.2	Betrachtung des Ausgangsfehlers	84
8.	<u>Der adaptive PS-Beobachter</u>	86
8.1	Festlegung des Fehlerkriteriums und Bildung des Adaptionsgesetzes	87
8.2	Konvergenzanalyse	90
8.3	Anforderung an die Eingangsgröße $u(k)$	92
8.4	Auswertung des zusätzlich zur Verfügung stehenden Signals $L(k)$	93
8.4.1	Erkennen von Parameter- bzw. Zustandsfehlern bei unzureichender Anregung der Beobachterdynamik $\underline{z}(k)$	93
8.4.1.1	Auslegung der Elemente des Vektors $\hat{\underline{g}}_d$	96
8.4.2	Schrittoptimaler PS-Beobachter	98

8.4.3	Rekonstruktion einer konstanten Störung, die auf dem Ausgang des Systems liegt	101
8.4.4	Ermittlung der Systemzustände $\underline{x}(k)$ bei sprungförmiger Störung des Systemausgangs	104
8.4.4.1	Erstes Verfahren	104
8.4.4.2	Zweites Verfahren	106
8.5	Beispiel für die Anwendung des adaptiven PS-Beobachters	107
8.5.1	Modellbeschreibung	107
8.5.2	Vorgabe der Eigenwerte des PS-Beobachters und Auslegung der $\hat{g}_d$ -Parameter	108
8.5.3	Berechnung der Transformationsmatrizen $\underline{T}_j$	109
8.5.4	Ermittlung der geschätzten Systemzustände $\hat{\underline{x}}(k)$	109
8.5.5	Simulationsergebnisse	112
9.	<u>Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse</u>	116
10.	<u>Literaturverzeichnis</u>	118
11.	<u>Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Abkürzungen</u>	122
12.	<u>Anhang</u>	125

Einleitung

Die Anwendung der modernen Regelungstheorie setzt für eine optimale Regelung die explizite Kenntnis der Struktur als auch des Zustandsvektors $\underline{x}(t)$ des zu regelnden Prozesses voraus. Da normalerweise, vor allem aus Kostengründen, nur relativ wenige Systemzustände meßtechnisch erfaßt werden, steht der gesamte Zustandsvektor nur in Ausnahmefällen zur Verfügung. Häufig können diese auch nicht direkt physikalischen Sensoren zugänglich gemacht werden.

Alle Syntheseverfahren der Regelungstechnik, die in dem jeweiligen Regelgesetz den Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ benötigen, müssen in solchen Fällen um ein dynamisches Modell (Beobachter, Zustandsrekonstruierer) erweitert werden. Der Beobachter hat somit die Aufgabe, die aus den tatsächlich verfügbaren Ein- und Ausgangssignalen die Systemzustände zu rekonstruieren.

Zur Dimensionierung eines solchen Modells benötigt man jedoch die Parameter des Systems (z. B. Verstärkungsfaktoren, Zeitkonstanten). Sind diese nun teilweise oder ganz unbekannt, wird der Einsatz eines adaptiven Beobachters erforderlich, der es ermöglicht, die fehlenden Systemgrößen "on-line" zu ermitteln.

Das Problem der adaptiven Zustandsschätzung wurde u. a. von Caroll und Lindorff / 6 /, Kudva und Narendra / 19 / und Lüders / 25 / behandelt.

Die Grundidee dieser Verfahren basiert auf der Anwendung eines Kalman-Beobachters, dessen Parameter während des Einschwingvorgangs kontinuierlich adaptiert werden, so daß der Zustandsfehler asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ gegen Null läuft. Das Hauptproblem besteht darin, die globale asymptotische Konvergenz des Gesamtsystems zu sichern.

Die adaptiven Beobachter nach / 6 / und / 19 / benötigen zusätzliche äußere Hilfssignale, die zur Sicherstellung der Konvergenz dienen.

Diese Signale werden bei einem Entwurf nach / 25 /, / 26 / nicht mehr benötigt, die auf einer Vereinfachung der Struktur mittels einer neuen kanonischen Form basieren.

Eine wesentliche Erweiterung wurde von Kreisselmeier / 16 / durchgeführt. Anstelle der Parameteradaption mittels eines Kalman-Beobachters wurde ein sog. parametrisierter Beobachter vorgestellt. Dieser ist eine alternative, äquivalente Darstellung des Kalman-Beobachters, besitzt jedoch eine abweichende Struktur, in der die Zustandsschätzung eine lineare Funktion der Parameter ist.

Somit kann die Parameteradaption völlig von der Beobachterdynamik getrennt werden, so daß eine wesentliche Vereinfachung beim Entwurf geeigneter Parameterschätzverfahren die Folge ist. So konnten auch Verfahren mit exponentieller Konvergenz des Zustandsfehlers angegeben werden.

Das entwickelte Verfahren, das in dieser Arbeit beschrieben wird, basiert im Gegensatz zu / 16 / nicht auf dem Kalman-Beobachter, sondern es wird von einer alternativen Darstellung der von Kaczorek / 14 /, / 15 / vorgestellten, nicht adaptiven, Methode ausgegangen. Es handelt sich hierbei um einen Entwurf mit erweiterter Beobachterdynamik. Die zusätzlich zur Verfügung stehende Zustandsgröße kann bei einer adaptiven, parametrisierten Realisierung dazu verwendet werden, weitere notwendige Informationen über den Adaptionsverlauf zu gewinnen. So kann z. B. unter bestimmten Voraussetzungen eine unzureichende Anregung der Beobachterdynamik festgestellt werden.

Die bisher beschriebenen Verfahren behandeln den idealen, d. h. ungestörten Fall, oder es wird wie beim Verfahren nach Bimbirekov / 4 / die Kenntnis der Prozeßparameter bei einer deterministischen Störung vorausgesetzt.

Der wesentliche Vorteil des neuen Verfahrens liegt darin, daß durch eine mathematische bzw. dynamische Modellerweiterung das Systemverhalten bei einer speziellen Klasse deterministischer Störungen verbessert werden konnte.

Hierzu werden zwei Verfahren vorgestellt, die eine Schätzung und Kompensation der anliegenden Störung für den eingeschwungenen Zustand ermöglichen.

Da eine reale Ausführung des kontinuierlichen adaptiven Beobachters auf Grund der extremen Anzahl von Integratoren und Vierquadranten-Multiplizierern aus wirtschaftlichen und technischen Gründen kaum durchführbar ist, wird für eine konkrete Realisierung mittels Prozeßrechner eine Diskretisierung des mathematischen Modells angegeben.

Somit ist auch eine schrittoptimale Lösung durch entsprechende Auslegung der wählbaren Beobachterparameter möglich.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß das Ziel dieser Arbeit darin besteht, den Entwurf eines zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten adaptiven Beobachters zu konzipieren, der u. a. robust gegen eine spezielle Klasse von Störungen sein soll. Die Ausführungen beschränken sich auf lineare, zeitinvariante Einfachsysteme.

Veröffentlichungen mit ähnlicher Aufgabenstellung / 18 / setzen, im Gegensatz zu der vorliegenden Arbeit, den geschlossenen Regelkreis voraus.

1. Problemstellung

Gegeben sei die mathematische Beschreibung eines linearen, zeit-invarianten, dynamischen Einfachsystems

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \quad \underline{x}(0) = \underline{0} \quad (1.1)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t), \quad (1.2)$$

das vollständig steuer- und beobachtbar und von bekannter Dimension n ist.

Es bestehen jedoch keine Kenntnisse von den Parametern des Systems, also den Elementen der Systemmatrix $\underline{A}$ und der Vektoren $\underline{b}$ und $\underline{c}$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit läßt sich das gegebene System in der sogenannten Beobachtungs-Normalform /23/ darstellen. Die Matrix $\underline{A}$, bzw. die Vektoren $\underline{b}$, $\underline{c}$ nehmen dann folgende Form an:

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0}_{n-1}^T & -a_1 \\ \hline & \vdots \\ & \vdots \\ \underline{I}_{n-1} & \vdots \\ & -a_n \end{array} \right], \quad (1.3)$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T, \quad (1.4)$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (1.5)$$

In dieser Darstellungsform sind nur die Parameter a_i und b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) unbekannt. Demzufolge ist nur die minimalste Anzahl von Parametern notwendig, um das System vollständig zu beschreiben.

Das Problem besteht jetzt darin, die unbekannten Systemparameter und Systemzustände nur durch die Messung der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ zu ermitteln.

Bei der Realisierung wird zunächst vom idealen, d. h. ungestörten Fall ausgegangen. Es schließt sich eine Erweiterung der Aufgabenstellung in Hinblick auf deterministische Störungen an.

2. Der Proportional-Integral-Beobachter

Für ein zeitinvariantes System (1.1), (1.2) läßt sich nach /14/ ein Beobachter der folgenden Form angeben:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \hat{\underline{F}}\hat{\underline{x}}(t) + \hat{\underline{b}}u(t) + \hat{\underline{h}}y(t) + \hat{\underline{g}}L(t), \quad (2.1)$$

$$\dot{L}(t) = y(t) - \hat{\underline{c}}^T \hat{\underline{x}}(t). \quad (2.2)$$

Mit den Definitionen:

$$\hat{\underline{F}} := \left[\begin{array}{c|c} \underline{0}_{n-1}^T & -\hat{\underline{f}}_1 \\ \hline \underline{I}_{n-1} & \begin{array}{c} \vdots \\ -\hat{\underline{f}}_n \end{array} \end{array} \right], \quad (2.3)$$

$$\hat{\underline{b}} := [\hat{b}_1 \ . \ . \ . \ \hat{b}_n]^T, \quad (2.4)$$

$$\hat{\underline{h}} := [\hat{h}_1 \ . \ . \ . \ \hat{h}_n]^T, \quad (2.5)$$

$$\hat{\underline{g}} := [\hat{g}_1 \ . \ . \ . \ \hat{g}_n]^T, \quad (2.6)$$

$$\hat{\underline{c}} := [0 \ . \ . \ 0 \ 1]^T. \quad (2.7)$$

Liegen keine Parameterabweichungen zwischen Strecke und Beobachter vor, ergibt sich:

$$\underline{\hat{F}} = \underline{A} - \underline{\hat{h}} \underline{\hat{c}}^T \quad (2.8)$$

$$\underline{\hat{b}} = \underline{\hat{b}} \quad (2.9)$$

bzw. durch die spezielle Form der Matrizen

$$\hat{h}_i = \hat{f}_i - a_i \quad (2.10)$$

$$\hat{b}_i = b_i. \quad (2.11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Das System, daß durch (2.1) und (2.2) beschrieben wird, bezeichnet man als Proportional-Integral-Beobachter / 14 /, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t) \\ L(t) \end{bmatrix} = \underline{0}. \quad (2.12)$$

$$(2.13)$$

Unter Berücksichtigung von (2.8) und (2.9) sowie des Beobachteraustauschs

$$\hat{y}(t) = \underline{\hat{c}}^T \underline{\hat{x}}(t) \quad (2.14)$$

entsteht aus (2.1) die Gleichung

$$\dot{\underline{\hat{x}}}(t) = \underline{\hat{A}} \underline{\hat{x}}(t) + \underline{\hat{b}} u(t) + \underline{\hat{h}} [y(t) - \hat{y}(t)] + \underline{\hat{g}} L(t). \quad (2.15)$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, daß im Gegensatz zum Kalman-Beobachter nicht nur über den $\hat{\underline{h}}$ - Vektor, sondern außerdem durch ein Signal $L(t)$, das von einem zusätzlichen Integrator gebildet und über den $\hat{\underline{g}}$ - Vektor eingekoppelt wird, eine Beeinflussung der Dynamik des Beobachters stattfindet.

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, wie die Bedingungen (2.12) und (2.13) erfüllt werden können.

Hierzu wird die Definition des Zustandsfehlers $\underline{\sigma}(t)$ eingeführt:

$$\underline{\sigma}(t) := \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t). \quad (2.16)$$

Mit den Gleichungen (1.1), (1.2), (2.1) und (2.2) ergibt sich die folgende Zustandsfehlerdifferenzialgleichung:

$$\dot{\underline{\sigma}}(t) = \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t) \quad (2.17)$$

bzw.

$$\dot{\underline{\sigma}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) - \hat{\underline{F}}\hat{\underline{x}}(t) - \hat{\underline{b}}u(t) - \hat{\underline{h}}y(t) - \hat{\underline{g}}L(t). \quad (2.18)$$

Eine Vereinfachung des obigen Ausdrucks läßt sich mit (2.8) erreichen:

$$\dot{\underline{\sigma}}(t) = \hat{\underline{F}}\underline{\sigma}(t) - \hat{\underline{g}}L(t). \quad (2.19)$$

Aus (2.2) folgt mit (1.2) und der Voraussetzung, daß keine Parameterabweichungen vorliegen:

$$\dot{\underline{L}}(t) = \hat{\underline{c}}^T \underline{\sigma}(t). \quad (2.20)$$

Somit läßt sich die nachfolgende Gesamtdarstellung angeben:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\sigma}}(t) \\ \dot{\underline{L}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{F}} & -\underline{\hat{g}} \\ \underline{\hat{c}}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\sigma}(t) \\ \underline{L}(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Definiert man die Systemmatrix

$$\underline{P} := \begin{bmatrix} \underline{\hat{F}} & -\underline{\hat{g}} \\ \underline{\hat{c}}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

mit den zugehörigen Eigenwerten λ_i und erreicht, daß $\text{Re} [\lambda_i] < 0$ für $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ sind, wären die Bedingungen (2.12) und (2.13) erfüllt.

Mit (1.3) nimmt (2.8) folgende Form an:

$$\underline{\hat{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -(\hat{a}_1 + \hat{h}_1) \\ 1 & 0 & & 0 & -(\hat{a}_2 + \hat{h}_2) \\ \cdot & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -(\hat{a}_n + \hat{h}_n) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

und somit wird

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & . & 0 & -(\hat{a}_1 + \hat{h}_1) & -\hat{g}_1 \\ 1 & 0 & . & 0 & -(\hat{a}_2 + \hat{h}_2) & -\hat{g}_2 \\ 0 & 1 & & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & & . & . & . \\ 0 & 0 & & 1 & -(\hat{a}_n + \hat{h}_n) & -\hat{g}_n \\ \hline 0 & . & . & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]. \quad (2.24)$$

Das charakteristische Polynom der Matrix $\underline{P}$ lautet:

$$\det [\lambda \underline{I}_{n+1} - \underline{P}] = \det \left[\begin{array}{cc} \lambda \underline{I}_n - \underline{\hat{F}} & \underline{\hat{g}} \\ -\underline{\hat{c}}^T & \lambda \end{array} \right] \quad (2.25)$$

$$= \det \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & . & 0 & (\hat{a}_1 + \hat{h}_1) & \hat{g}_1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & (\hat{a}_2 + \hat{h}_2) & \hat{g}_2 \\ 0 & -1 & \lambda & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & -1 & \lambda + (\hat{a}_n + \hat{h}_n) & \hat{g}_n \\ \hline 0 & . & . & 0 & -1 & \lambda \end{array} \right]. \quad (2.26)$$

Wird (2.26) entwickelt, erhält man den allgemeinen Ausdruck:

$$\det[\lambda \underline{I}_{n+1} - \underline{P}] = \lambda^{n+1} + \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{h}_i) \lambda^i + \sum_{i=1}^n \hat{g}_i \lambda^{i-1}. \quad (2.27)$$

Gibt man jetzt gewünschte Eigenwerte für die $\underline{P}$ -Matrix vor und bildet das charakteristische Polynom, so erhält man durch Koeffizientenvergleich mit (2.27) die noch unbestimmten Vektoren $\hat{\underline{h}}$ und $\hat{\underline{g}}$.

Werden zur weiteren Vereinfachung die Definitionen (2.28) und (2.29) eingeführt,

$$\underline{x}(t) := \begin{bmatrix} \underline{\sigma}(t) \\ L(t) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\underline{\phi}(t) := e^{\underline{P}t} \quad (2.29)$$

entsteht als Lösung von (2.21)

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t) \underline{x}(0) \quad (2.30)$$

oder ausführlich dargestellt

$$\begin{bmatrix} \underline{\sigma}(t) \\ L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1}(t) & \varphi_{1,2}(t) & \dots & \varphi_{1,n}(t) & \varphi_{1,n+1}(t) \\ \varphi_{2,1}(t) & & & \varphi_{2,n}(t) & \varphi_{2,n+1}(t) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n,1}(t) & \dots & \dots & \varphi_{n,n}(t) & \varphi_{n,n+1}(t) \\ \varphi_{n+1,1}(t) & \dots & \dots & \dots & \varphi_{n+1,n+1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\sigma}(0) \\ L(0) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Da der Anfangswert $L(0)$ des zusätzlichen Integrators frei wählbar ist, wird er aus Vereinfachungsgründen auf Null gesetzt.

Mit der Definition

$$\underline{\Phi}'(t) := \begin{bmatrix} \varphi_{1,1}(t) & . & . & . & \varphi_{1,n}(t) \\ . & & & & . \\ \varphi_{n,1}(t) & . & . & . & \varphi_{n,n}(t) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

läßt sich nun die Dynamik des Zustandsfehlers $\underline{\sigma}(t)$ angeben:

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{\Phi}'(t) \underline{\sigma}(0). \quad (2.33)$$

Somit wäre gezeigt, daß die Bedingungen (2.12) und (2.13) erfüllt werden.

2.1 Strukturbild des PI-Beobachters

Bild 2.1 zeigt das Strukturbild des PI-Beobachters entsprechend der Gleichungen (2.1) und (2.2).

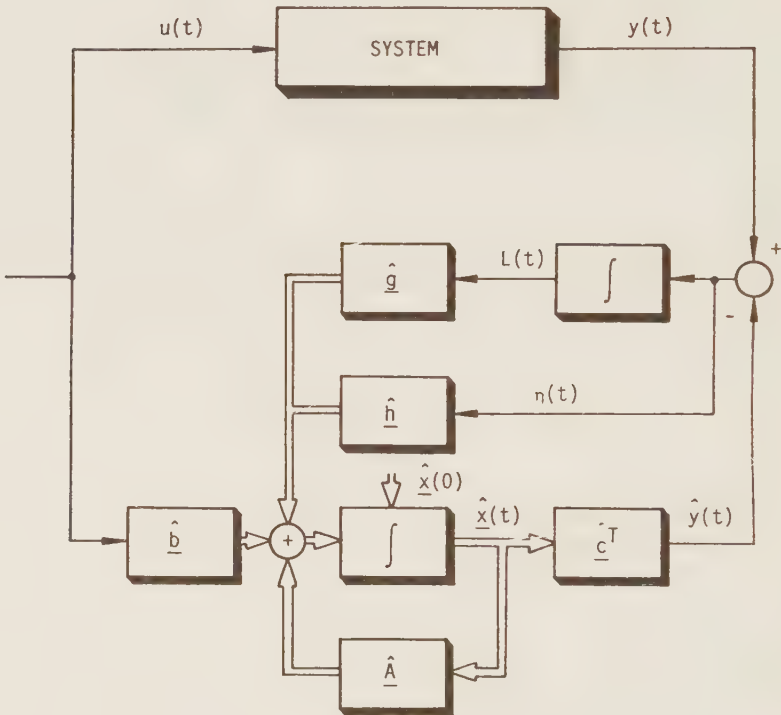


Bild 2.1 Strukturbild des PI-Beobachters

3. Herleitung des parametrisierten PI - Beobachters

Eine analoge Vorgehensweise wie nach / 16 / ergibt für die Lösung von (2.1) unter Anwendung der Laplace-Transformation:

$$\hat{\underline{x}}(t) = e^{\hat{\underline{F}}t} \hat{\underline{x}}(0) + \int_0^t e^{\hat{\underline{F}}(t-\tau)} [\hat{\underline{b}}u(\tau) + \hat{\underline{h}}y(\tau) + \hat{\underline{g}}L(\tau)] d\tau. \quad (3.1)$$

Mit

$$\underline{p} := \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}} \\ \hat{\underline{h}} \\ \hat{\underline{g}} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

läßt sich (3.1) so darstellen:

$$\hat{\underline{x}}(t) = e^{\hat{\underline{F}}t} \hat{\underline{x}}(0) + \int_0^t e^{\hat{\underline{F}}(t-\tau)} [\underline{I}u(\tau) \mid \underline{I}y(\tau) \mid \underline{I}L(\tau)] \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}} \\ \hat{\underline{h}} \\ \hat{\underline{g}} \end{bmatrix} d\tau. \quad (3.3)$$

Der Parametervektor $\underline{p}$ enthält 3n Komponenten: ist er konstant, dann kann er aus dem Integral herausgezogen werden:

$$\hat{\underline{x}}(t) = e^{\hat{\underline{F}}t} \hat{\underline{x}}(0) + \int_0^t e^{\hat{\underline{F}}(t-\tau)} \begin{bmatrix} u(\tau) & y(\tau) & L(\tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(\tau) & y(\tau) & L(\tau) \end{bmatrix} d\tau \underline{p} \quad (3.4)$$

Die j-te Spalte des obigen Faltungsintegrals lautet:

$$\int_0^t e^{\hat{F}(t-\tau)} \underline{e}_j u(\tau) d\tau, \quad (3.5)$$

(j = 1, 2, ..., n),

wobei $\underline{e}_j$ die j-te Spalte der Einheitsmatrix darstellt.

Entsprechendes gilt für $y(\tau)$ und $L(\tau)$. Es treten also 3n Integrale der Form (3.5) auf.

Das Integral (3.5) kann man auch als Lösung eines dynamischen Systems mit folgender Beschreibung auffassen:

$$\dot{\underline{\xi}}_j(t) = \hat{F} \underline{\xi}_j(t) + \underline{e}_j u(t) \quad \underline{\xi}_j(0) = \underline{0}. \quad (3.6)$$

Analog gilt:

$$\dot{\underline{\xi}}_{j+n}(t) = \hat{F} \underline{\xi}_{j+n}(t) + \underline{e}_j y(t) \quad \underline{\xi}_{j+n}(0) = \underline{0} \quad (3.7)$$

$$\dot{\underline{\xi}}_{j+2n}(t) = \hat{F} \underline{\xi}_{j+2n}(t) + \underline{e}_j L(t) \quad \underline{\xi}_{j+2n}(0) = \underline{0}. \quad (3.8)$$

(j = 1, 2, ..., n)

Führt man

$$\underline{M}(t) := [\underline{\xi}_1(t), \underline{\xi}_2(t) \dots \underline{\xi}_{3n}(t)] \quad (3.9)$$

ein, ergibt sich aus (3.6) - (3.8):

$$\dot{\underline{M}}(t) = \hat{F} \underline{M}(t) + [\underline{I} u(t) \mid \underline{I} y(t) \mid \underline{I} L(t)]. \quad (3.10)$$

$$\underline{M}(0) = \underline{0}_{n, 3n}$$

Unter Berücksichtigung der Lösung von (3.10) kann die Beschreibung der Beobachterzustände auch wie folgt vorgenommen werden:

$$\hat{\underline{x}}(t) = e^{\hat{\underline{F}}t} \hat{\underline{x}}(0) + \underline{M}(t) \underline{p}. \quad (3.11)$$

Die Gleichungen (3.10) und (3.11) stellen die parametrisierte Form des PI-Beobachters dar.

3.1 Minimierung des dynamischen Systems $M(t)$

Zur Realisierung des Systems $\underline{M}(t)$ laut Gleichung (3.10) werden $3n^2$ Differential-Gleichungen 1. Ordnung benötigt. Durch die spezielle Form von $\hat{\underline{F}}$ ist es jedoch möglich, eine Reduzierung auf $3n$ Gleichungen vorzunehmen.

Hierzu werden die beiden folgenden Sätze benötigt, deren Beweise im Anhang zu finden sind.

Satz 3.1

Wenn $\hat{\underline{F}}$ in Beobachtungsnormalform vorliegt, dann ist

$$(\underline{sI} - \hat{\underline{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n = \frac{1}{\det(\underline{sI} - \hat{\underline{F}})} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} . \quad (3.12)$$

($\underline{e}_n$ bezeichnet den n-ten Einheitsvektor)

Satz 3.2

Wenn $\hat{\underline{F}}$ in Beobachtungsnormalform vorliegt, dann ist

$$(\underline{sI} - \hat{\underline{F}})^{-1} \underline{e}_i = \underline{I}_i (\underline{sI} - \hat{\underline{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n . \quad (3.13)$$

Nach Anwendung der Laplace-Transformation auf die Gleichungen (3.6) - (3.8) ergibt sich:

$$\underline{x}_j(s) = (s \underline{I} - \underline{\hat{F}})^{-1} \underline{e}_j u(s) \quad (3.15)$$

$$\underline{x}_{j+n}(s) = (s \underline{I} - \underline{\hat{F}})^{-1} \underline{e}_j y(s) \quad (3.16)$$

$$\underline{x}_{j+2n}(s) = (s \underline{I} - \underline{\hat{F}})^{-1} \underline{e}_j L(s) . \quad (3.17)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Ein Vergleich mit den Definitionen

$$\underline{z}_1(s) := (s \underline{I} - \underline{\hat{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n u(s) \quad (3.18)$$

$$\underline{z}_2(s) := (s \underline{I} - \underline{\hat{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n y(s) \quad (3.19)$$

$$\underline{z}_3(s) := (s \underline{I} - \underline{\hat{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n L(s) \quad (3.20)$$

liefert unter Berücksichtigung von (3.14) die folgenden Gleichungen:

$$\underline{x}_j(s) = \underline{T}_j \underline{z}_1(s) \quad (3.21)$$

$$\underline{x}_{j+n}(s) = \underline{T}_j \underline{z}_2(s) \quad (3.22)$$

$$\underline{x}_{j+2n}(s) = \underline{T}_j \underline{z}_3(s) . \quad (3.23)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Nach der Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich die Beschreibung der Beobachterdynamik

$$\dot{\underline{z}}_1(t) = \underline{\hat{F}}^T \underline{z}_1(t) + \underline{e}_n u(t) \quad \underline{z}_1(0) = \underline{0} \quad (3.24)$$

$$\dot{\underline{z}}_2(t) = \underline{\hat{F}}^T \underline{z}_2(t) + \underline{e}_n y(t) \quad \underline{z}_2(0) = \underline{0} \quad (3.25)$$

$$\dot{\underline{z}}_3(t) = \underline{\hat{F}}^T \underline{z}_3(t) + \underline{e}_n L(t) \quad \underline{z}_3(0) = \underline{0} \quad (3.26)$$

sowie die Lineartransformationen

$$\underline{\xi}_j(t) = \underline{I}_j \underline{z}_1(t) \quad (3.27)$$

$$\underline{\xi}_{j+n}(t) = \underline{I}_j \underline{z}_2(t) \quad (3.28)$$

$$\underline{\xi}_{j+2n}(t) = \underline{I}_j \underline{z}_3(t) \quad (3.29)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

deren Transformationsmatrizen $\underline{I}_j$ durch Koeffizientenvergleich ermittelt werden.

Ein Gesamtsystem zur Beschreibung der Beobachterdynamik läßt sich aus den Einzelsystemen (3.24) - (3.26) wie folgt bilden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{z}}_1(t) \\ \dot{\underline{z}}_2(t) \\ \dot{\underline{z}}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{F}}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\hat{F}}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\hat{F}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_1(t) \\ \underline{z}_2(t) \\ \underline{z}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{e}_n & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{e}_n & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \\ L(t) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Mit den Anfangswerten:

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_1(0) \\ \underline{z}_2(0) \\ \underline{z}_3(0) \end{bmatrix} = \underline{0}. \quad (3.31)$$

Aus den $3n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung (3.30) können mit Hilfe der Lineartransformationen (3.27) - (3.29) die $3n^2$ Variablen $\xi_{ij}(t)$ (3.9), die zur Bildung des parametrisierten PI-Beobachters notwendig sind, gebildet werden.

3.2 Strukturbild des parametrisierten PI-Beobachters

Mit den Gleichungen (2.2), (3.11), (3.27) - (3.29) und (3.30) läßt sich die Struktur des parametrisierten PI-Beobachters wie folgt angeben:

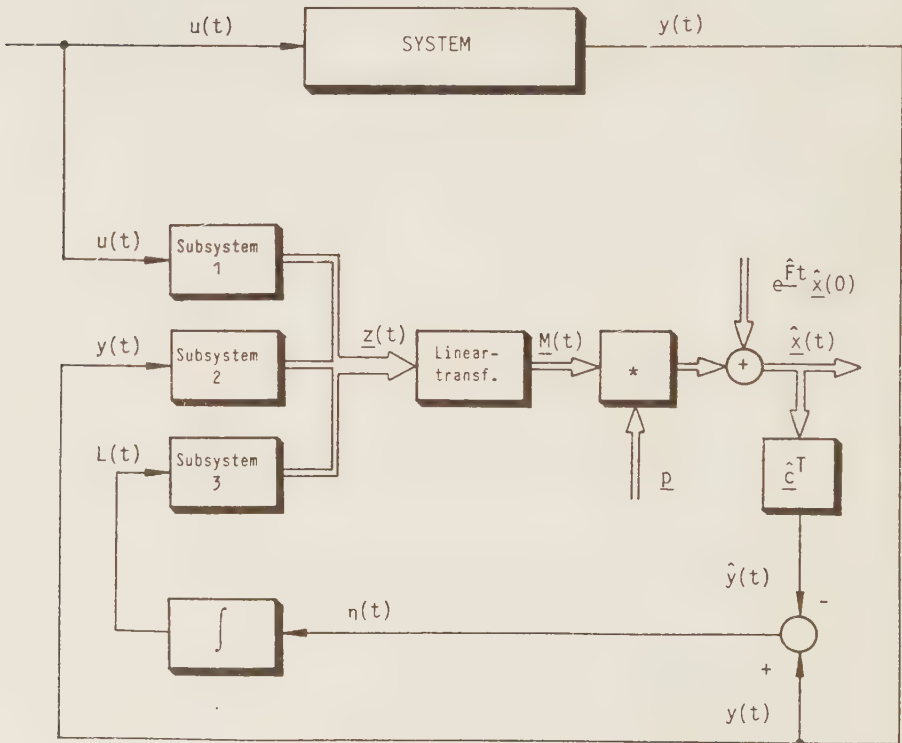


Bild 3.1 Strukturbild des parametrisierten PI-Beobachters

3.3 Fehlerdynamik des PI-Beobachters

3.3.1 Betrachtung des Zustandsfehlers

Besitzt der Beobachter die gleichen Parameter wie das System, ist also $\underline{p} = \underline{p}^*$ ($\underline{p}^* = \text{Nominalparameter}$) und sind weiterhin die Anfangswerte $\underline{x}(0)$ und $\hat{\underline{x}}(0)$ identisch, so erhält man mit (2.33) und (3.11) eine alternative Darstellung der Zustandsgrößen des Systems.

$$\underline{x}(t) = \underline{M}(t) \underline{p}^* + e^{\hat{\underline{F}} t} \underline{x}(0) + \underline{\Phi}'(t) \underline{\sigma}(0). \quad (3.32)$$

Wird jetzt entsprechend der Definition (2.16) die Gleichung (3.11) von (3.22) subtrahiert, ergibt sich der Zustandsfehler $\underline{\sigma}(t)$ zu

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{M}(t) (\underline{p}^* - \underline{p}) + \underline{\Phi}'(t) \underline{\sigma}(0). \quad (3.33)$$

Zur weiteren Vereinfachung folgt jetzt die Definition des Parameterfehlers $\Delta \underline{p}$:

$$\Delta \underline{p} := \underline{p}^* - \underline{p}. \quad (3.34)$$

Aus (3.33) wird demnach:

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{M}(t) \Delta \underline{p} + \underline{\Phi}'(t) \underline{\sigma}(0). \quad (3.35)$$

Aus der Gleichung (3.35) ist ersichtlich, daß sich für den Fall $\underline{p} \neq \underline{p}^*$ der Zustandsfehler in zwei Komponenten aufteilt:

- a) Parameterfehler
- b) Beobachtungsfehler (dieser geht, unabhängig von den aktuellen Parametern, exponentiell gegen Null)

3.3.2 Betrachtung des Ausgangsfehlers

Mit (1.2) und (2.14) läßt sich der Ausgangsfehler $n(t)$ definieren:

$$n(t) := y(t) - \hat{y}(t). \quad (3.36)$$

Aus (2.16) folgt:

$$n(t) = \underline{c}^T \underline{\sigma}(t) \quad (3.37)$$

und unter Berücksichtigung von (3.33)

$$n(t) = \underline{c}^T \underline{M}(t) (\underline{p}^* - \underline{p}) + \underline{c}^T \underline{\Phi}'(t) \underline{\sigma}(0). \quad (3.38)$$

Eine Vereinfachung von (3.38) kann folgendermaßen durchgeführt werden.

Durch Vormultiplikation von (3.15) - (3.17) mit $\underline{c}^T$ entsteht:

$$\underline{c}^T \underline{\varepsilon}_j(s) = \underline{e}_n^T (s \underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \underline{e}_j u(s) \quad (3.39)$$

$$\underline{c}^T \underline{\varepsilon}_{j+n}(s) = \underline{e}_n^T (s \underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \underline{e}_j y(s) \quad (3.40)$$

$$\underline{c}^T \underline{\varepsilon}_{j+2n}(s) = \underline{e}_n^T (s \underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \underline{e}_j L(s). \quad (3.41)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\underline{e}_n^T (s \underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \underline{e}_j = \underline{e}_j^T (s \underline{I} - \hat{\underline{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n \quad (3.42)$$

und anschließendem Vergleich mit (3.18) - (3.20) erhält man

$$\underline{c}^T \underline{\xi}_j(s) = \underline{e}_j^T \underline{z}_1(s) \quad (3.43)$$

$$\underline{c}^T \underline{\xi}_{j+n}(s) = \underline{e}_j^T \underline{z}_2(s) \quad (3.44)$$

$$\underline{c}^T \underline{\xi}_{j+2n}(s) = \underline{e}_j^T \underline{z}_3(s) \quad (3.45)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Mit den Definitionen (3.9) und

$$\underline{z}^T(t) := [\underline{z}_1^T, \underline{z}_2^T, \underline{z}_3^T] \quad (3.46)$$

wird aus (3.43) bis (3.45):

$$\underline{z}^T(t) = \underline{c}^T \underline{M}(t) . \quad (3.47)$$

Dies in (3.38) eingesetzt, ergibt den Ausgangsfehler:

$$n(t) = \underline{z}^T(\underline{p}^* - \underline{p}) + \underline{c}^T \underline{\Phi}'(t) \underline{\sigma}(0) . \quad (3.48)$$

4. Der adaptive Proportional-Integral-Beobachter

Im Folgenden soll die parametrisierte Darstellung des PI-Beobachters dazu verwendet werden, die Parameter $\underline{p}^*$ sowie die Zustände $\underline{x}(t)$ des unbekannten Systems (1.1), (1.2) zu ermitteln. Der Beobachter, der diese Aufgabe lösen soll, wird mit (3.11) wie folgt angegeben:

$$\tilde{\underline{x}}(t) = [\underline{\xi}_1(t), \underline{\xi}_2(t) \dots \underline{\xi}_{3n}(t)] \tilde{\underline{p}}(t) + e^{\hat{\underline{F}}t} \tilde{\underline{x}}(0), \quad (4.1)$$

wobei sich die $\underline{\xi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 3n$) aus den Gleichungen (3.27) - (3.29) ergeben und $\tilde{\underline{p}}(t)$ die momentane Parameterschätzung darstellt, die sich durch die kontinuierliche Adaption, mit Hilfe eines noch zu definierenden Adaptionsgesetzes, ergibt.

Die Ausgangsgröße des nun adaptiven Beobachters lautet mit (3.47) und (4.1):

$$\tilde{y}(t) = \underline{z}^T(t) \tilde{\underline{p}}(t) + \underline{c}^T e^{\hat{\underline{F}}t} \tilde{\underline{x}}(0). \quad (4.2)$$

In den weiteren Ausführungen werden die Anforderungen sowohl an das Adaptionsgesetz als auch an das zu wählende Fehlerkriterium festgelegt.

4.1 Forderungen an das Fehlerkriterium sowie Bildung eines adaptiven Gesetzes / 17 /

Das Ziel eines noch zu definierenden Adaptionsgesetzes soll sein, daß ein PI-Beobachter mit einem konstanten Parametervektor $\underline{p}$ vorliegt, so daß $\underline{p}(t) \rightarrow \underline{p}^*$ für $t \rightarrow \infty$.

Es sei $\underline{\hat{p}}(t)$ der momentan geschätzte Parametervektor zum Zeitpunkt t . Somit ist der Beobachter zu diesem Zeitpunkt ein System mit konstanten Parametern und Werten, die identisch der momentanen Schätzung sind.

Entsprechend der Definition des Ausgangsfehlers (3.36)

$$n(t) := y(t) - \bar{y}(t) \quad (4.3)$$

läßt sich die zeitliche Vergangenheit des Ausgangsfehlers des momentanen PI-Beobachters im Intervall $0 \leq \tau \leq t$ mit (3.11) wie folgt angeben:

$$n(\underline{\hat{p}}(t), \tau) = y(\tau) - \underline{c}^T [\underline{M}(\tau) \underline{\hat{p}}(t) + e^{\hat{F}\tau} \hat{x}(0)] . \quad (4.4)$$

Analog der Definition des Parameterfehlers (3.34)

$$\Delta \underline{\hat{p}}(t) := \underline{p}^* - \underline{\hat{p}}(t) \quad (4.5)$$

ergibt sich mit (3.32) und (3.33)

$$n(\underline{\hat{p}}(t), \tau) = \underline{c}^T \underline{M}(\tau) \Delta \underline{\hat{p}}(t) + \underline{c}^T \underline{\Phi}(\tau) \underline{\sigma}(0) . \quad (4.6)$$

Es wird jetzt ein beliebiges nichtnegatives Fehlerkriterium $J(\eta, t)$ formuliert, das die obige Fehlervergangenheit $\eta(\bar{p}(t), \tau)$ im Intervall $0 \leq \tau \leq t$ quantitativ schätzt und folgende Bedingungen erfüllt:

$$a) J(0, t) \equiv 0$$

$$b) J(\eta, t) \text{ ist konvex in } \eta$$

(4.7)

$$c) \partial J(\eta(\bar{p}(t), \tau), t) / \partial \bar{p}(t) \text{ existiert und ist stetig}$$

$$d) \text{ Wenn } \bar{p}(t) \equiv \bar{p}^* \text{ dann } \lim_{t \rightarrow \infty} J(\eta, t) = 0 \text{ (vergängliche Speichereigenschaft)}$$

Aus (4.6) ist ersichtlich, daß das Fehlerkriterium implizit eine Funktion von $\Delta \bar{p}$ ist, da η implizit von $\Delta \bar{p}$ abhängt.

Weiterhin wird der Systemeingang $u(t)$ in Kombination mit dem Fehlerkriterium $J(\cdot)$ als definit anregend bezeichnet, wenn $J(\cdot)$ eine positive definite Funktion von $\Delta \bar{p}$ für alle $t \geq t_1$ ($t_1 > 0$) ist. Die Existenz eines solchen Paares $u(t), J(\cdot)$ wird später gezeigt.

Da das Fehlerkriterium eine Funktion des momentanen geschätzten Parametervektors $\bar{p}(t)$ ist, wird folgende Definition eingeführt:

$$E(\bar{p}(t), t) := J(\eta(\bar{p}(t), \tau), t). \quad (4.8)$$

Mit (4.8) ergibt sich ein adaptives Gesetz der folgenden Form:

$$\dot{\bar{p}}(t) = -k(\cdot) \underline{G} \frac{\partial E(\bar{p}(t), t)}{\partial \bar{p}(t)}, \quad (4.9)$$

wobei $k(\cdot) \geq k_0 > 0$ eine beliebige skalare Verstärkung darstellt, die auch von $\bar{p}(t)$ und t abhängen kann.

$\underline{G}$ ist eine symmetrische, positiv definite Verstärkungsmatrix.

Entsprechend Gleichung (3.11) erhält man die adaptive Zustands-schätzung

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{M}(t) \tilde{\underline{p}}(t) + e^{\hat{\underline{F}} t} \hat{\underline{x}}(0), \quad (4.10)$$

wobei sich der obige Ausdruck, für den Fall $\hat{\underline{x}}(0) = \underline{0}$, noch vereinfachen läßt.

4.2 Konvergenzanalyse

Ein adaptiver PI-Beobachter, der durch

$$(3.10) \quad \dot{\underline{M}}(t) = \hat{\underline{F}} \underline{M}(t) + [\underline{I} u(t) \mid \underline{I} y(t) \mid \underline{I} L(t)] ; \quad \underline{M}(0) = \underline{0}$$

$$(4.9) \quad \dot{\underline{p}}(t) = -k(.) \underline{G} \frac{\partial E(\underline{p}(t), t)}{\partial \underline{p}(t)}$$

$$(4.10) \quad \hat{\underline{x}}(t) = \underline{M}(t) \underline{p}(t) + e^{\hat{\underline{F}} t} \underline{x}(0)$$

beschrieben wird, besitzt folgende Konvergenzeigenschaften:

Satz: 4.1

Wenn $u(t)$ und $J(.)$ definit anregend sind, dann gilt:

- a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{p}(t) = \underline{p}^*$ für einen beliebigen Anfangswert $\underline{p}(0)$
- b) Die Konvergenzgeschwindigkeit kann durch die Wahl von $k(.)$, $\underline{G}$, $\hat{\underline{F}}$ und $J(.)$ für $t \geq t_1$ beliebig gesteigert werden

- c) $\lim_{t \rightarrow \infty} || \underline{M} || \cdot || \Delta \underline{p} || = 0$ hat zur Folge, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)] = \underline{0} \text{ ist.}$$

Beweis

Zu a)

Da $J(\eta, t)$ konvex in η und η eine lineare Funktion von $\tilde{p}$ ist, folgt, daß $E(\cdot)$ konvex in $\tilde{p}$ ist.

Daher gilt nach / 7 / :

$$E[\alpha \underline{p}^* + (1-\alpha) \tilde{p}(t), t] \leq \alpha E[\underline{p}^*, t] + (1-\alpha) E[\tilde{p}(t), t] \quad (4.11)$$

bzw.

$$E[\tilde{p}(t) + \alpha(\underline{p}^* - \tilde{p}(t), t)] - E[\tilde{p}(t), t] \leq \alpha E[\underline{p}^*, t] - \alpha E[\tilde{p}(t), t]. \quad (4.12)$$

Mit

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{E[\tilde{p}(t) + \alpha(\underline{p}^* - \tilde{p}(t), t)] - E[\tilde{p}(t), t]}{\alpha} = \left[\frac{\partial E(\tilde{p}(t), t)}{\partial \tilde{p}(t)} \right]^T (\underline{p}^* - \tilde{p}(t)) \quad (4.13)$$

wird aus (4.12)

$$\left[\frac{\partial E(\tilde{p}(t), t)}{\partial \tilde{p}(t)} \right]^T (\tilde{p}(t) - \underline{p}^*) \geq E[\tilde{p}(t), t] - E[\underline{p}^*, t]. \quad (4.14)$$

Zur weiteren Betrachtung wird jetzt die folgende Ljapunow-Funktion eingeführt:

$$W(t) := \frac{1}{2} \Delta \tilde{p}(t)^T \underline{G}^{-1} \Delta \tilde{p}(t), \quad (\text{positiv definit}) \quad (4.15)$$

wobei nach (4.5) $\Delta \tilde{p}(t) = \underline{p}^* - \tilde{p}(t)$ ist.

Wenn $\dot{\tilde{W}}(t)$ negativ definit ist, dann gilt $\Delta \underline{\tilde{p}}(t) \rightarrow \underline{0}$ für $t \rightarrow \infty$.

Die Ableitung von (4.15) ergibt:

$$\dot{\tilde{W}}(t) = \Delta \underline{\tilde{p}}^T(t) \underline{G}^{-1} \dot{\Delta \underline{\tilde{p}}}(t) \quad (4.16)$$

bzw. mit Berücksichtigung von (4.5)

$$\dot{\tilde{W}}(t) = \Delta \underline{\tilde{p}}^T(t) \underline{G}^{-1} (- \dot{\underline{\tilde{p}}}(t)).$$

Mit (4.9) folgt daraus:

$$\dot{\tilde{W}}(t) = \Delta \underline{\tilde{p}}^T(t) \underline{G}^{-1} k(.) \underline{G} \frac{\partial E(\underline{\tilde{p}}(t), t)}{\partial \underline{\tilde{p}}(t)} \quad (4.17)$$

$$= k(.) \Delta \underline{\tilde{p}}^T(t) \underline{I} \frac{\partial E(\underline{\tilde{p}}(t), t)}{\partial \underline{\tilde{p}}(t)}$$

$$\dot{\tilde{W}}(t) = k(.) \left[\frac{\partial E(\underline{\tilde{p}}(t), t)}{\partial \underline{\tilde{p}}(t)} \right]^T (\underline{p}^* - \underline{\tilde{p}}(t)). \quad (4.18)$$

Wird jetzt (4.14) mit $-k(.)$ erweitert, so erhält man

$$k(.) \left[\frac{\partial E(\underline{\tilde{p}}(t), t)}{\partial \underline{\tilde{p}}(t)} \right]^T (\underline{p}^* - \underline{\tilde{p}}(t)) \leq -k(.) \{ E(\underline{\tilde{p}}(t), t) - E(\underline{p}^*, t) \}. \quad (4.19)$$

Ein Vergleich mit (4.18) liefert schließlich

$$\dot{\tilde{W}}(t) \leq -k(.) \{ E(\underline{\tilde{p}}(t), t) - E(\underline{p}^*, t) \}. \quad (4.20)$$

Wenn der Klammerausdruck in (4.20) positiv definit unter den obigen Voraussetzungen ist, dann wäre a) bewiesen.

Hierzu werden folgende Fälle unterschieden:

Fall 1

$$\underline{\sigma}(0) = \underline{0}.$$

Mit (4.6), (4.7)a und (4.8) wird aus (4.20)

$$\dot{W}(t) \leq -k(.) \in (\tilde{p}(t), t). \quad (4.21)$$

$\in (\tilde{p}(t), t)$ ist aber nach Voraussetzung definit angeregt.

Fall 2

$$\underline{\sigma}(0) \neq \underline{0}$$

Für diesen Fall ist bei definiter Anregung $\in (\tilde{p}(t), t)$ ebenfalls positiv definit und konvex in $\Delta \tilde{p}(t)$.

Es sei ein beliebiges $\epsilon > 0$ und $t \geq t_1$. Dann ergibt sich aus (4.15)

$$W(t) = \frac{1}{2} \Delta \tilde{p}(t)^T \underline{G}^{-1} \Delta \tilde{p}(t) \geq \epsilon, \quad (4.22)$$

daß eine Zahl $\delta > 0$ derart existiert, daß $\in (\tilde{p}(t), t) \geq \delta$.

Mit der Voraussetzung (4.7)d und (4.8) folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\underline{p}^*, t) = 0. \quad (4.23)$$

Ferner existiert ein $t' > 0$, so daß $E(\underline{p}^*, t) < \delta/2$ für alle $t \geq t'$.
Diese Tatsache führt mit (4.20) dazu, daß $\dot{W}(t)$ negativ ist.

$$\dot{W}(t) < -k(.) \frac{\delta}{2}, \quad (4.24)$$

$$\text{für } W \geq \epsilon, \quad t \geq t''$$

wobei $k(.) \geq k_0 > 0$;

$$t'' := \max \{ t_1, t' \}$$

Bild 4.1 veranschaulicht dies.

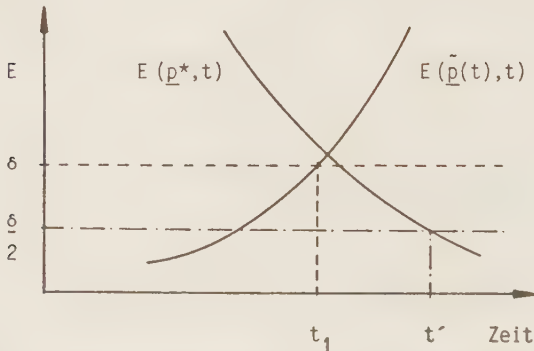


Bild 4.1 Veranschaulichendes Diagramm zum Beweis Satz 4.1 (Fall 2)

Eine weitere Abschätzung erfolgt mit k_0 .

Es ist bisher gezeigt worden, daß für den Fall $W > \epsilon$, $\dot{W} < 0$ ist. Ist das W also einmal kleiner als ϵ geworden, kann es nicht mehr darüber hinaus laufen, so daß eigentlich nur noch zu zeigen ist, daß das W , wenn es größer ist, tatsächlich unter diese ϵ -Schranke gelangt.

Dazu wird folgende Annahme getroffen:

$$W(t'') > \epsilon. \quad (4.25)$$

(und es würde nicht kleiner als ϵ werden)

Dann ergibt sich ein

$$\dot{W} < -k_0 \frac{\delta}{2} \quad (4.26)$$

für alle $t > t''$

Mit

$$W = W(t'') + \int \dot{W}, \quad (4.27)$$

wobei

$$\int \dot{W} = \left(-k_0 \frac{\delta}{2} \right) \quad (4.28)$$

multipliziert mit dem Zeitintervall, und der Zeitraum gerade

$$\frac{2}{k_0 \delta} W(t'') \quad (4.29)$$

gewählt wurde, folgt:

$$\dot{W} = W(t'') + \left[-\frac{k_0 \delta}{2} \cdot \frac{2}{k_0 \delta} \cdot W(t'') \right] \quad (4.30)$$

$$\dot{W} = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß das $\dot{W}$ immer größer bleiben muß.

Zusammenfassung der Teilüberlegungen

a) Wenn das $\dot{W} > \epsilon$ ist, dann ist das $\dot{W}$ streng negativ, d. h. wenn das $\dot{W}$ von Anfang an kleiner ist, bleibt es kleiner.

b) Wenn es am Anfang größer ist, dann würde es jetzt, weil das $\dot{W}$ kleiner als eine negative Konstante ist, praktisch linear kleiner werden. D. h. dieser Zeitpunkt ist berechenbar und hier mit

$$\frac{2}{k_0 \delta} W(t'') \quad (4.31)$$

abgeschätzt.

Daraus kann man folgern, daß es eben nicht größer als ϵ für alle Zeiten bleiben kann. Somit folgt:

$$W(t) < \epsilon \quad (4.32)$$

für alle

$$t \geq t'' + \frac{2}{k_0 \delta} W(t''). \quad (4.33)$$

Zu b)

Es soll gezeigt werden, daß für ein beliebig kleines $\epsilon > 0$, $W(t) \leq \epsilon$ für $t \geq t_1 + \Delta t$ gemacht werden kann, wobei $\Delta t > 0$ ebenfalls beliebig klein sei.

Betrachtet wird jetzt ein Zeitpunkt $t > t_1$, dann ist wie in Teil a) $W(t) \geq \epsilon$, dies hat die Existenz von $\delta > 0$ zur Folge, so daß $E(\underline{p}(t), t) \geq \delta$.

Unabhängig davon, können die Eigenwerte von $\hat{F}$ und die Speichereigenschaft von $J(\cdot)$ so gewählt werden, daß

$$E(\underline{p}^*, t) < \frac{\delta}{2} \quad (4.34)$$

für $t \geq t_1$

Dann ist

$$\frac{2}{k_0 \delta} W(t_1) \quad (4.35)$$

gerade ein Δt , was das W auf Null bringt.

Unter der Annahme, $W > \epsilon$ ist

$$\Delta t \leq \frac{2}{k_0 \delta} W(t_1) \quad (4.36)$$

Setzt man im Intervall $0 \leq t \leq t_1$ $k(\cdot, t) = 0$, dann folgt $W(t_1) = W_0$.

Wird weiterhin $k(\cdot, t)$ hinreichend groß für $t > t_1$ gewählt, erhält man

$$\Delta t \leq \frac{2 W_0}{k \delta} \quad (4.37)$$

so klein wie gewünscht.

Zu c)

Mit der Definition des Zustandsfehlers ergeben (3.32) und (4.10)

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{M}(t)\underline{\Delta p}(t) + \underline{\phi}(t)\underline{\sigma}(0). \quad (4.38)$$

Daraus folgt direkt die obige Behauptung.

Ein weiteres Ergebnis aus den vorstehenden Betrachtungen besteht darin, daß für die Konvergenz des adaptiven Zustandsbeobachtungsfehlers $\underline{\sigma}(t) \rightarrow \underline{0}$ keine Beschränkungen hinsichtlich des Systemeingangs und -ausgangs verlangt werden, wie es bei anderen Beobachtern sonst üblich ist.

Stattdessen kann $u(t)$ und/oder $y(t)$ und somit $\underline{M}(t)$ unbegrenzt für $t \rightarrow \infty$ ansteigen, sofern $\|\underline{\Delta p}\| \rightarrow 0$ schneller als $\|\underline{M}(t)\| \rightarrow \infty$ geht. Diese Eigenschaft wird von Wichtigkeit, wenn der adaptive PI-Beobachter für eine Zustandsrückführung im geschlossenen Regelkreis eingesetzt werden soll.

4.3 Konkrete Fehlerkriterien und adaptive Gesetze

Wurden in Kapitel 4.1 die theoretischen Vorüberlegungen für die zu verwendenden Fehlerkriterien durchgeführt, wird im Folgenden eine konkrete Lösung vorgestellt.

Eines der gebräuchlichsten Fehlerkriterien, die zur Adaption der Parameter eingesetzt werden, ist das Quadrat des momentanen Ausgangsfehlers $n(t)$. Wird jetzt zur Bestimmung des Minimums ein Gradientenverfahren erster Ordnung angewendet, erhält man, wie auch schon in / 2 / vorgestellt, ein adaptives Gesetz der Form

$$\dot{\underline{p}}(t) = \underline{G} \underline{z}(t) [y(t) - \bar{y}(t)], \quad (4.39)$$

wobei $\underline{G}$ eine symmetrische, positiv definite Verstärkungsmatrix darstellt. Wie in / 16 / gezeigt, konvergiert der mit (4.39) versehene adaptive Beobachter exponentiell, jedoch kann die Konvergenzgeschwindigkeit nicht beliebig gesteigert werden. / 22 /

Dieser Nachteil entfällt, wenn ein Fehlerkriterium der Form

$$J(t) = \int_0^t e^{-q(t-\tau)} [y(\tau) - \bar{y}(\tau)]^2 d\tau \quad (4.40)$$

q ist eine positive Konstante

angewendet wird, in dem auch die zeitliche Vergangenheit des Ausgangsfehlers Berücksichtigung findet.

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.5) und (4.6) in (4.40) erhält man

$$J(t) = \int_0^t e^{-q(t-\tau)} [\underline{c}^T \underline{M}(\tau) (\underline{p}^* - \underline{\tilde{p}}(t)) + \underline{c}^T \underline{\phi}(\tau) \underline{\sigma}(0)]^2 d\tau \quad (4.41)$$

und unter Berücksichtigung von (3.47)

$$J(t) = \int_0^t e^{-q(t-\tau)} [\underline{z}^T(\tau) \underline{p}^* - \underline{z}^T(\tau) \underline{\tilde{p}}(t) + \underline{c}^T \underline{\phi}(\tau) \underline{\sigma}(0) + \underline{c}^T e^{\underline{\hat{F}}\tau} \underline{\hat{x}}(0) - \underline{c}^T e^{\underline{\hat{F}}\tau} \underline{\hat{x}}(0)]^2 d\tau. \quad (4.42)$$

Da der Ausgang der Strecke mit

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{M}(t) \underline{p}^* + \underline{c}^T \underline{\phi}(t) \underline{\sigma}(0) + \underline{c}^T e^{\underline{\hat{F}}t} \underline{\hat{x}}(0) \quad (4.43)$$

angegeben werden kann, folgt:

$$J(t) = \int_0^t e^{-q(t-\tau)} [y(\tau) - \underline{z}^T(\tau) \underline{\tilde{p}}(t) - \underline{c}^T e^{\underline{\hat{F}}\tau} \underline{\hat{x}}(0)]^2 d\tau. \quad (4.44)$$

Wird jetzt (4.44) nach $\underline{\tilde{p}}(t)$ abgeleitet, ergibt sich:

$$\frac{\partial J(t)}{\partial \underline{\tilde{p}}(t)} = 2 \int_0^t e^{-q(t-\tau)} [y(\tau) - \underline{z}^T(\tau) \underline{\tilde{p}}(t) - \underline{c}^T e^{\underline{\hat{F}}\tau} \underline{\hat{x}}(0)] (-\underline{z}(\tau)) d\tau \quad (4.45)$$

$$= 2 \int_0^t e^{-q(t-\tau)} [\underline{c}^T e^{\underline{\hat{F}}\tau} \underline{\hat{x}}(0) - y(\tau)] \underline{z}(\tau) d\tau + \\ + 2 \int_0^t e^{-q(t-\tau)} \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) \underline{\tilde{p}}(t) d\tau. \quad (4.46)$$

Als Zwischenschritt werden die folgenden Definitionen eingeführt:

$$\underline{r}(t) := \int_0^t e^{-q(t-\tau)} [\underline{c}^T e^{\hat{F}\tau} \hat{x}(0) - y(\tau)] \underline{z}(\tau) d\tau \quad (4.47)$$

$$\underline{R}(t) := \int_0^t e^{-q(t-\tau)} \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) d\tau. \quad (4.48)$$

Die obigen Integrale (4.47), (4.48) können als Lösungen folgender dynamischer Systeme aufgefaßt werden:

$$\dot{\underline{r}}(t) = -q \underline{r}(t) + [\underline{c}^T e^{\hat{F}t} \hat{x}(0) - y(t)] \underline{z}(t) \quad (4.49)$$

$$\underline{r}(0) = \underline{0}$$

$$\dot{\underline{R}}(t) = -q \underline{R}(t) + \underline{z}(t) \underline{z}^T(t). \quad (4.50)$$

$$\underline{R}(0) = \underline{0}$$

Somit vereinfacht sich die Darstellung (4.46) zu

$$\frac{\partial J(t)}{\partial \underline{p}(t)} = 2 \underline{r}(t) + 2 \underline{R}(t) \tilde{\underline{p}}(t). \quad (4.51)$$

Eingesetzt in (4.9) ergibt schließlich das realisierbare Modell des adaptiven Gesetzes.

$$\dot{\tilde{\underline{p}}}(t) = -k(.) \underline{G} [\underline{r}(t) + \underline{R}(t) \tilde{\underline{p}}(t)]. \quad (4.52)$$

4.4 Anforderungen an die Eingangsgröße $u(t)$

Im Kapitel 4.1 wurde der Systemeingang $u(t)$ in Kombination mit dem Fehlerkriterium $J(\cdot)$ als definit anregend bezeichnet, wenn $J(\cdot)$ eine positiv definite Funktion von $\Delta \underline{p}(t)$ für alle $t \geq t_1$ ($t_1 > 0$) ist.

Daß eine solche Funktion durch Vorgabe eines bestimmten $u(t)$ immer existiert, wird in den weiteren Ausführungen gezeigt.

Nach Anwendung der Laplace-Transformation auf die Gleichung (3.10) erhält man:

$$\underline{M}(s) = (s \underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} [\underline{I} u(s) \mid \underline{I} y(s) \mid \underline{I} L(s)] . \quad (4.53)$$

Eine Erweiterung mit (3.34)

$$\Delta \underline{p} = \underline{p}^* - \underline{p} := \begin{bmatrix} \Delta \underline{b} \\ \Delta \underline{h} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}} \\ \hat{\underline{h}} \\ \hat{\underline{g}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{h} \\ \underline{g} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

und vormultiplizieren mit $\underline{c}^T$ ergibt unter Berücksichtigung von (3.47)

$$\underline{z}^T(s) \Delta \underline{p} = \underline{c}^T (s \underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \Delta \underline{b} u(s) + \underline{c}^T (s \underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \Delta \underline{h} y(s) . \quad (4.55)$$

Wird (3.48) ebenfalls der Laplace-Transformation unterworfen und (4.55) eingesetzt, entsteht die Übertragungsfunktion:

$$\frac{\eta(s)}{u(s)} = \underline{c}^T (s \underline{I} - \hat{F})^{-1} \Delta \underline{b} + \underline{c}^T (s \underline{I} - \hat{F})^{-1} \Delta \underline{h} \underline{c}^T (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} . \quad (4.56)$$

Diese Übertragungsfunktion hat höchstens $(n-1)$ konjugiert komplexe Nullstellen. Enthält $u(t)$ n verschiedene Frequenzen, dann enthält $\eta(t)$ mindestens eine von ihnen, für den Fall, daß $\Delta \underline{b} \neq \underline{0}$ und/oder $\Delta \underline{h} \neq \underline{0}$.

Wenn also $\Delta \underline{p} \neq \underline{0}$, dann ist $\eta \neq 0$ und somit $\eta^2 > 0$, also ist J eine positiv definite Funktion von $\Delta \underline{p}$.

Man wähle also $u(t)$ als Überlagerung von n -verschiedenen Sinus-signalen.

4.5 Auswertung des zusätzlich zur Verfügung stehenden Signals $L(t)$

Durch die dynamische Erweiterung des Kalman-Beobachters zum PI-Beobachter steht eine zusätzliche Zustandsgröße $L(t)$ zur Verfügung, mit deren Hilfe weitere Informationen über den Adaptionverlauf gewonnen werden können.

Welche praktischen Auswirkungen dadurch entstehen, wird in den weiteren Abschnitten dargestellt.

4.5.1 Erkennen von Parameter- bzw. Zustandsfehlern bei unzureichender Anregung der Beobachterdynamik $z(t)$

Es wird jetzt die Situation betrachtet, in der die nach Kapitel 4.2 geforderte Eingangsgröße $u(t)$ nicht gewährleistet werden kann.

Ausgehend von der Systembeschreibung des Systems (1.1), (1.2) und der des Beobachters (2.1), (2.14) ergibt sich die Dynamik des Zustandsfehlers $\underline{\sigma}(t)$ zu

$$\underline{\dot{\sigma}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) - \underline{\hat{A}}\underline{\hat{x}}(t) - \underline{\hat{b}}u(t) - \underline{\hat{h}}\underline{\hat{c}}^T\underline{x}(t) + \underline{\hat{h}}\underline{\hat{c}}^T\underline{\hat{x}}(t) - \underline{\hat{g}}L(t).$$

(4.57)

Aus (2.16) folgt:

$$\underline{x}(t) = \underline{\sigma}(t) + \underline{\hat{x}}(t).$$

(4.58)

Wird der obige Ausdruck in (4.57) eingesetzt, so erhält man unter Berücksichtigung der Definition (2.8) sowie $\underline{\hat{c}}^T = \underline{\hat{c}}^T$:

$$\underline{\hat{\sigma}}(t) = \underline{\hat{F}} \underline{\sigma}(t) + (\underline{A} - \underline{\hat{A}}) \underline{\hat{x}}(t) + (\underline{b} - \underline{\hat{b}}) u(t) - \underline{\hat{g}} L(t). \quad (4.59)$$

Zur weiteren Vereinfachung werden die folgenden Definitionen eingeführt:

$$\underline{\delta A} := \underline{A} - \underline{\hat{A}} \quad (4.60)$$

$$\underline{\delta b} := \underline{b} - \underline{\hat{b}}. \quad (4.61)$$

Mit ihnen erhält man schließlich:

$$\underline{\hat{\sigma}}(t) = \underline{\hat{F}} \underline{\sigma}(t) + \underline{\delta A} \underline{\hat{x}}(t) + \underline{\delta b} u(t) - \underline{\hat{g}} L(t). \quad (4.62)$$

Da nach Voraussetzung $\text{Re}[\lambda_i] < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), wobei λ_i die Eigenwerte der Matrix $\underline{\hat{F}}$ sind, braucht nur noch dafür gesorgt zu werden, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\delta A} \underline{\hat{x}}(t) + \underline{\delta b} u(t) - \underline{\hat{g}} L(t) \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad (4.63)$$

um den Zustandsfehler $\underline{\sigma}(t)$ zu eliminieren.

Wie auch schon in /29/ gezeigt, läßt sich bei Kenntnis der Parameteränderungen die Forderung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\sigma}(t) = \underline{0} \quad (4.64)$$

durch entsprechende Wahl der $\underline{\hat{g}}$ -Parameter erreichen.

Da $\hat{g}_1$ entsprechend der Polvorgabe (2.27) vorgegeben ist, lassen sich somit $L(t)$ und damit die restlichen $\hat{g}$ -Parameter berechnen. Voraussetzung ist jedoch, daß kein System mit integralem Verhalten vorliegt, denn damit sich ein $L(t) \neq 0$ einstellt, muß mindestens $(a_1 - \hat{a}_1)$ bzw. $(b_1 - \hat{b}_1)$ ungleich Null sein. Wird weiterhin (4.63) umgestellt und nach der ersten Zeile entwickelt, so entsteht:

$$(-a_1 + \hat{a}_1) \hat{x}_n(t) + (b_1 - \hat{b}_1) u(t) = \hat{g}_1 L(t). \quad (4.65)$$

Für den eingeschwungenen Zustand wird

$$\hat{x}_n(t) = x_n(t) = y(t) \quad (4.66)$$

und somit aus (4.65)

$$(-a_1 + \hat{a}_1) y(t) + (b_1 - \hat{b}_1) u(t) = \hat{g}_1 L(t). \quad (4.67)$$

Aus Gleichung (4.67) ist nun auch die Begründung für die obige Forderung zu erkennen. So läuft ja bei geregelten Systemen mit integralem Verhalten die Eingangsgröße $u(t)$ für den eingeschwungenen Zustand gegen Null. Da der Parameter a_1 ebenfalls Null ist, besteht in diesem Fall keine Möglichkeit, mit Hilfe der $\hat{g}$ -Parameter eine Kompensation durchzuführen.

Für den Fall, daß eine nach Kapitel 4.2 vorgeschriebene Eingangsgröße nicht sichergestellt ist, also eventuell eine unzureichende Anregung des Adaptionsprozesses vorliegt, kann bei einer Parameterabweichung der obigen Art festgestellt werden, ob die geschätzten Parameter bzw. Zustände den tatsächlichen Streckenwerten entsprechen.

Die Auswertung der Simulationsergebnisse haben jedoch gezeigt, daß die Parameteradaption aller Prozeßgrößen annähernd zum gleichen Zeitpunkt abgeschlossen wurde, so daß man davon ausgehen kann, daß bei $L(t) = 0$ die anderen Parameter a_i , b_i ($i = 2, 3, \dots, n$) ebenfalls richtig adaptiert wurden.

Durchgeführte Simulationen, in denen als Eingangsgröße $u(t)$ der Einheitssprung gewählt wurde, haben ergeben, daß die Parameteradaption nach dem Einschwingen der Beobachterdynamik stehen blieb, und die geschätzten Parameter gegen einen falschen Endwert konvergierten. Durch die von Null verschiedene zusätzliche Zustandsgröße $L(t)$ konnte dieses Ergebnis bestätigt werden.

Vorteilhaftere Resultate konnten durch Überlagerung der Eingangsgröße $u(t)$ mit einem zusätzlichen Signal, daß entsprechend Kapitel 4.4 gebildet und in Abhängigkeit von $L(t)$ eingespeist wurde, erzielt werden.

4.5.1.1 Auslegung der Elemente des Vektors $\hat{g}$

Aus den bisherigen Betrachtungen könnte der Eindruck entstehen, daß die $(n-1)$ $\hat{g}$ -Parameter frei wählbar sind. Dies ist jedoch nicht der Fall.

Da nach Voraussetzung die Beobachterdynamik $\underline{P}$ stabile Eigenwerte aufweisen muß, also $\text{Re}[\lambda_i] < 0$ für $(i = 1, 2, \dots, n+1)$, können die $\hat{g}$ -Parameter nur innerhalb gewisser Grenzen gewählt werden, da diese die $\hat{f}$ -Parameter beeinflussen. Die Berechnung der erforderlichen Parameter erfolgt nach Vorgabe eines gewünschten charakteristischen Polynoms $(n+1)$ ter Ordnung durch Koeffizientenvergleich mit

$$(2.27) \quad \det[\lambda \underline{I}_{n+1} - \underline{P}] = \lambda^{n+1} + \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{h}_i) \lambda^i + \sum_{i=1}^n \hat{g}_i \lambda^{i-1}.$$

Mit Hilfe eines Verfahrens zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität /21/ z. B. Routh, Hurwitz, kann durch die entstehenden Ungleichungen der Wertebereich der $(n-1)$ $\hat{g}$ -Parameter bestimmt werden, für die die $\hat{F}$ -Matrix (2.23) noch stabil ist. Siehe hierzu auch das praktische Beispiel in Kapitel 4.6.

4.5.2 Rekonstruktion einer konstanten Störung, die auf dem Ausgang des Systems liegt

Es soll der Fall betrachtet werden, daß die Ausgangsgröße des Systems $y(t)$ nicht exakt zur Verfügung steht, da der Meßgröße eine konstante Störung der Form $s(t) = a\sigma_e(t)$ ($\sigma_e(t)$ ≙ Einheitsprung) additiv überlagert ist.

Diese Art der Störung kann z. B. durch eine Offset-Spannung eines Meßverstärkers hervorgerufen werden. Es steht also nur ein fehlerbehaftetes Signal als Eingangsgröße in den adaptiven Beobachter zur Verfügung. Bild 4.2 zeigt die Struktur des Gesamtsystems mit Einkopplung der Störung $s(t)$.

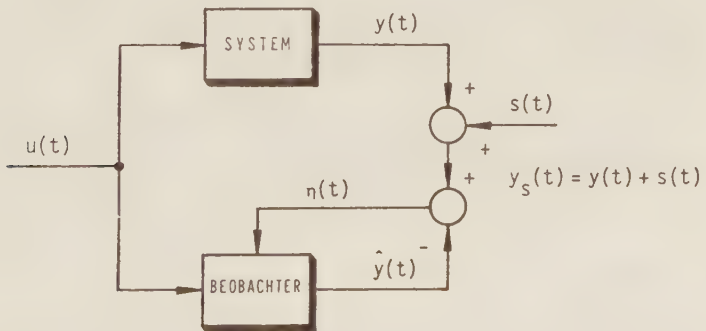


Bild 4.2 Struktur des Gesamtsystems mit Störung $s(t)$

Ein adaptiver Beobachter nach / 17/ ist nicht dazu in der Lage die Parameter sowie die Zustände eines derart gestörten Systems richtig zu adaptieren.

Die folgende Überlegung verdeutlicht diese Behauptung.

Annahme:

Es seien die $2n$ Parameter als auch die n Anfangszustände des Systems bekannt und als Anfangswerte des Adaptionsprozesses eingesetzt. Für beliebige Eingangsgrößen $u(t)$ wäre für den Fall keiner Störung der Ausgangsfehler $\eta(t) = 0$, somit auch die Bedingung des Fehlerkriteriums (4.7)a $J(0,t) \equiv 0$ erfüllt. Setzt jetzt eine Störung $s(t)$ ein, wird der Ausgangsfehler $\eta(t) \neq 0$ und der Adaptionsprozeß variiert die richtigen Parameter, um den Ausgangsfehler zu beseitigen. Der damit verbundene Parameterfehler $\Delta \tilde{p}(t)$ ist nach Gleichung (3.35) auch für den Zustandsfehler $\underline{\sigma}(t) \neq \underline{0}$ verantwortlich.

In den folgenden Ausführungen wird ein Verfahren vorgestellt, mit dessen Hilfe die Störung $s(t)$ durch bekannte Beobachtergrößen für $t \rightarrow \infty$ rekonstruiert werden kann.

Ausgehend vom parametrisierten adaptiven PI-Beobachter läßt sich der nachfolgende Satz aufstellen:

Satz 4.2

Eine konstante Störung $s(t) = a \sigma_e(t)$ ($\sigma_e(t) \hat{=}$ Einheitssprung), die der Ausgangsgröße des Systems $y(t)$ additiv überlagert ist, läßt sich bei Kenntnis der Prozeßparameter wie folgt nachbilden:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{s}(t) = a, \quad (4.68)$$

wobei

$$\hat{s}(t) = \frac{\hat{g}_1}{\hat{f}_1 - \hat{h}_1(t)} L(t) \quad (4.69)$$

bzw. mit der Beziehung (2.10) $\hat{h}_1(t) = \hat{f}_1 - \hat{a}_1(t)$

$$\hat{s}(t) = \frac{\hat{g}_1}{\hat{a}_1(t)} L(t). \quad (4.70)$$

Beweis

Aus der Systembeschreibung des PI-Beobachters

$$(2.1) \quad \dot{\underline{x}}(t) = \underline{\hat{F}} \underline{\hat{x}}(t) + \underline{\hat{b}} u(t) + \underline{\hat{h}} y(t) + \underline{\hat{g}} L(t)$$

$$(2.2) \quad \dot{\underline{L}}(t) = y(t) - \underline{\hat{c}}^T \underline{\hat{x}}(t)$$

wird für eine Störung der Form $y_s(t) = y(t) + s(t)$
($y_s(t)$ ist die gemessene Ausgangsgröße des Systems)

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\hat{F}} \underline{\hat{x}}(t) + \underline{\hat{b}} u(t) + \underline{\hat{h}} [y(t) + s(t)] + \underline{\hat{g}} L(t) \quad (4.71)$$

$$\dot{\underline{L}}(t) = y(t) + s(t) - \underline{\hat{c}}^T \underline{\hat{x}}(t). \quad (4.72)$$

Mit der Definition des Zustandsfehlers (2.17) und der Voraussetzung, daß die Streckenparameter bekannt sind, ergeben sich folgende Fehlergleichungen:

$$\dot{\underline{\sigma}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) - [\underline{\hat{A}} \underline{\hat{x}}(t) + \underline{\hat{b}} u(t) + \underline{\hat{h}} (y(t) + s(t)) - \underline{\hat{h}} y(t) + \underline{\hat{g}} L(t)]$$

$$= \underline{\hat{A}} \underline{\sigma}(t) - \underline{\hat{h}} \underline{\hat{c}}^T (\underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t)) - \underline{\hat{h}} s(t) - \underline{\hat{g}} L(t)$$

$$\dot{\underline{\sigma}}(t) = (\underline{\hat{A}} - \underline{\hat{h}} \underline{\hat{c}}^T) \underline{\sigma}(t) - \underline{\hat{h}} s(t) - \underline{\hat{g}} L(t). \quad (4.73)$$

Unter Berücksichtigung von (2.8) $\underline{\hat{F}} = \underline{\hat{A}} - \underline{\hat{h}} \underline{\hat{c}}^T$ erhält man:

$$\dot{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\hat{F}}\underline{\sigma}(t) - \underline{\hat{h}}s(t) - \underline{\hat{g}}L(t). \quad (4.74)$$

Für den eingeschwungenen Zustand ($t \rightarrow \infty$) wird aus (4.74)

$$0 = \underline{\hat{F}}\underline{\sigma}(t) - \underline{\hat{h}}s(t) - \underline{\hat{g}}L(t) \quad (4.75)$$

und aus (4.72) entsteht

$$0 = \underline{\hat{c}}^T \underline{\sigma}(t) + s(t) = \sigma_n(t) + s(t). \quad (4.76)$$

Wird (4.76) in (4.75) eingesetzt und nach der 1. Zeile entwickelt, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$0 = (\hat{f}_1 - \hat{h}_1) s(t) - \hat{g}_1 L(t). \quad (4.77)$$

Somit kann aus dem zur Verfügung stehenden Beobachterzustand $L(t)$ die Störung $s(t)$ für $t \rightarrow \infty$ mit der folgenden Gleichung nachgebildet werden:

$$\hat{s}(t) = \frac{\hat{g}_1}{\hat{f}_1 - \hat{h}_1(t)} L(t). \quad (4.78)$$

Im Satz 4.2 wurde der eingeschwungene Zustand von $\underline{\sigma}(t)$ und $L(t)$ vorausgesetzt. Es muß nun noch gezeigt werden, daß diese Bedingungen auch erfüllt werden.

Ausgehend von den Gleichungen (4.72) und (4.74) läßt sich analog zu (2.21) eine Gesamtdarstellung angeben.

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\sigma}}(t) \\ \dot{\underline{L}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}} & -\hat{\underline{g}} \\ \hat{\underline{c}}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\sigma}(t) \\ \underline{L}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{\underline{h}} \\ 1 \end{bmatrix} s(t). \quad (4.79)$$

Mit den Definitionen (2.22) und (2.28) erhält man als Lösung für (4.79)

$$\underline{\chi}(t) = e^{\underline{P} t} \underline{\chi}(0) + \int_0^t e^{\underline{P} (t-\tau)} \begin{bmatrix} -\hat{\underline{h}} \\ 1 \end{bmatrix} s(\tau) d\tau. \quad (4.80)$$

Da nach (2.27) die $\underline{P}$ -Matrix stabil ausgelegt wird, ergibt sich für konstante Störungen und $t \rightarrow \infty$ ein konstanter Lösungsvektor $\underline{\chi}(t)$, bzw.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\sigma}}(t) \\ \dot{\underline{L}}(t) \end{bmatrix} = \underline{0}. \quad (4.81)$$

Damit ist auch gezeigt, daß der Ausgangsfehler $n(t)$, der ja nicht nur als Steuergröße für den Adaptionprozeß, sondern auch als Eingangsgröße des zusätzlichen Integrators dient, gegen Null läuft.

Wie aus Gleichung (4.76) hervorgeht, ist der Zustandsfehler $\sigma_n \neq 0$ um die Störung $s(t)$ zu kompensieren. Auf den ersten Blick erscheint es sinnvoll, die geschätzte Störgröße $\hat{s}(t)$ von der Meßgröße $y_s(t)$ zu subtrahieren, um den Einfluß der Störung auf den Beobachter zu eliminieren. Daß eine solche Vorgehensweise nicht möglich ist, zeigen die folgenden Darstellungen:

Satz 4.3

Eine direkte Rückführung, zur Kompensation der Störung $s(t)$ der Form

$$n(t) = y(t) + s(t) - \hat{y}(t) - \hat{s}(t) \quad (4.82)$$

ist nicht möglich.

Beweis

Der Beweis wird mit der Widerspruchsannahme geführt. Es wird angenommen, daß die Rückführung der Form (4.82) möglich ist. Da nach Voraussetzung kein System mit integralem Verhalten vorliegt, ist somit $\hat{a}_1 \neq 0$. Durch die Polvorgabe der Beobachterdynamik (2.27) wird $\hat{g}_1 \neq 0$ = konstant vorgegeben. Somit muß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) \neq 0 \quad (4.83)$$

sein, damit die anstehende Störung mit der Gleichung (4.70) nachgebildet werden kann.

Wird jetzt der eingeschwungene Zustand betrachtet, $(t \rightarrow \infty)$ ergibt sich mit (4.68) und (4.82)

$$n(t) = y(t) - \hat{y}(t). \quad (4.84)$$

Liegen weiterhin keine Parameterabweichungen zwischen System und Beobachter vor, gilt auf Grund der Bedingung (2.13)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0. \quad (4.85)$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu der obigen Notwendigkeit,
daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) \neq 0 \quad (4.86)$$

sein muß.

4.5.3 Ermittlung der Systemzustände $x(t)$ bei sprungförmiger Störung des Systemausgangs

Ausgehend von dem Problem, daß für den eingeschwungenen Zustand der Zustandsfehler $\underline{a}(t)$ zwar konstant aber ungleich Null ist, werden nun zwei Lösungen vorgeschlagen, die diesen Mangel beseitigen.

4.5.3.1 Erstes Verfahren

Der Grundgedanke besteht darin, eine Systemerweiterung derart vorzunehmen, daß ein zusätzlicher Beobachter aufgebaut wird, der als Eingangsgrößen $u(t)$, sowie den bereinigten Meßwert

$$y_b(t) = y(t) + s(t) - \hat{s}(t) \quad (4.87)$$

erhält.

Mit (4.68) wird aus (4.87)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_b(t) = y(t). \quad (4.88)$$

Da nur der Ausgang des Systems mit einer Störung versehen ist, braucht man, auf Grund der parametrisierten Darstellung, nur den Teil der Beobachterdynamik zusätzlich nachzubilden, der für die Ausgangsgröße $y_b(t)$ zuständig ist.

Man erhält also ein zusätzliches dynamisches System der Form

$$\dot{\underline{z}}_4(t) = \underline{\hat{F}}^T \underline{z}_4(t) + \underline{e}_n y_b(t) \quad \underline{z}_4(0) = \underline{0}. \quad (4.89)$$

Mit der Lineartransformation

$$\underline{x}_{j+n}'(t) = \underline{T}_j \underline{z}_4(t) \quad (4.90)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

und der formellen Umbenennung

$$\underline{x}_j'(t) = \underline{x}_j(t) \quad (4.91)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

ergibt sich analog zu (3.9) und (3.11) die Beschreibung der Beobachtungszustände

$$\hat{\underline{x}}'(t) = [\underline{x}_1'(t), \underline{x}_2'(t), \dots, \underline{x}_{2n}'(t)] \tilde{\underline{p}}(t) + e^{\hat{F}t} \hat{\underline{x}}'(0) \quad (4.92)$$

und somit der entsprechende Zustandsfehlervektor

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{M}'(t) \Delta \tilde{\underline{p}}(t) + \underline{\Phi}(t) \underline{\sigma}(0) \quad (4.93)$$

der, wie schon gezeigt, für den eingeschwungenen Zustand gegen Null läuft.

4.5.3.1.1 Strukturbild des erweiterten PI-Beobachters

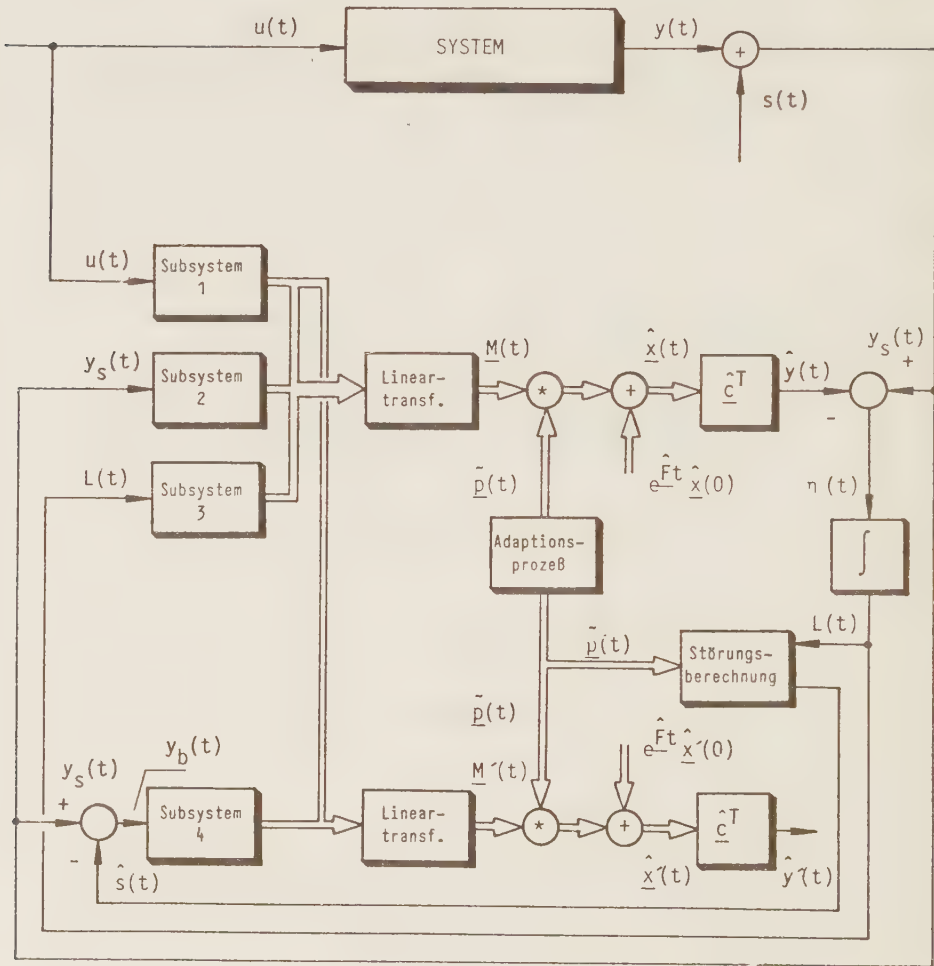


Bild 4.3 Strukturbild des erweiterten PI-Beobachters

4.5.3.2 Zweites Verfahren

Ohne weitere dynamische Systemerweiterung kommt diese Lösungsvariante aus. Betrachtet man den eingeschwungenen Zustand, so ergibt sich mit (4.68), (4.70) und (4.76) der n-te Zustandsfehler

$$\sigma_n(t) = - \frac{\hat{g}_1}{\hat{a}_1} L(t). \quad (4.94)$$

Unter Verwendung von (2.16) wird daraus

$$x_n(t) = \hat{x}_n(t) - \frac{\hat{g}_1}{\hat{a}_1} L(t). \quad (4.95)$$

Die noch fehlenden Zustandsgrößen $x_i(t)$ für $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, ergeben sich mit Hilfe von (4.75)

$$\underline{0} = \hat{F} \underline{\sigma}(t) - \hat{h} s(t) - \hat{g} L(t). \quad (4.96)$$

Unter Berücksichtigung von (4.68) und (4.70) gilt:

$$\underline{0} = \hat{F} \underline{\sigma}(t) - \left[\frac{\hat{g}_1}{\hat{a}_1} \hat{h} + \hat{g} \right] L(t). \quad (4.97)$$

Entwickelt man jetzt (4.97) von der zweiten Zeile an, so ergibt sich durch die spezielle Form von $\hat{F}$ (2.23):

$$\sigma_i(t) = f_{i+1} \sigma_n(t) + \left[\frac{\hat{g}_1}{\hat{a}_1} \hat{h}_{i+1} + \hat{g}_{i+1} \right] L(t). \quad (4.98)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Benutzt man nun noch den Zusammenhang (2.16), so vereinfacht sich mit (4.94) der obige Ausdruck zur endgültigen Lösung.

$$x_i(t) = \hat{x}_i(t) + \left[\hat{g}_{i+1} - \frac{\hat{g}_1}{\hat{a}_1} \hat{a}_{i+1} \right] L(t). \quad (4.99)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

4.6 Beispiel für die Anwendung des adaptiven PI-Beobachters

4.6.1 Modellbeschreibung

Gegeben ist das vereinfachte Modell eines Druck-Spannungs-Wandlers. Die Eingangsgröße $u(t)$ ist der Luftdruck über dem Membranteller mit der Fläche A . Ausgangsgröße ist die Spannung $y(t)$. Der schematische Aufbau des vollständig steuerbaren und vollständig beobachtbaren Systems ist in Bild 4.4 dargestellt.

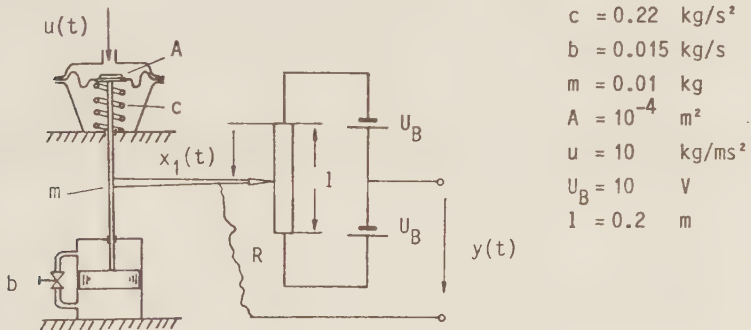


Bild 4.4 Schematischer Aufbau des vereinfachten Modells

Werden die systembeschreibenden Differentialgleichungen in die sog. Beobachtungs-Normalform /23/ transformiert, so erhält man das lineare Zustandsgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{m} \\ 1 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{2 A U_B}{l m} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.100)$$

sowie die Ausgangsgleichung

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) . \quad (4.101)$$

Nach der Normierung ergibt sich mit den konkreten Zahlenwerten

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2.0 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.102)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) . \quad (4.103)$$

4.6.2 Vorgabe der Eigenwerte des PI-Beobachters und Auslegung der $\hat{g}$ -Parameter

Die Eigenwerte der $\underline{P}$ -Matrix (2.24) werden wie folgt gewählt:

$$\lambda_1 = -1.0 \quad \lambda_2 = -1.1 \quad \lambda_3 = -1.2 \quad (4.104)$$

Somit ergibt sich das charakteristische Polynom

$$\lambda^3 + 3.3 \lambda^2 + 3.62 \lambda + 1.32 . \quad (4.105)$$

Wird jetzt (2.27) für $n=2$ entwickelt, so erhält man

$$\lambda^3 + (\hat{a}_2 + \hat{h}_2) \lambda^2 + (\hat{a}_1 + \hat{h}_1 + \hat{g}_2) \lambda + \hat{g}_1 . \quad (4.106)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (4.105) ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Beobachterparameter:

$$\begin{aligned}\hat{g}_1 &= 1.32 \\ \hat{a}_1 + \hat{h}_1 &= 3.62 - \hat{g}_2 \\ \hat{a}_2 + \hat{h}_2 &= 3.3.\end{aligned}\tag{4.107}$$

Wie schon in Kapitel 4.5.1.1 gezeigt, können die $(n-1)$ $\hat{g}$ -Parameter nicht beliebig gewählt werden, da die Beobachterdynamik $\hat{F}$ stabile Eigenwerte aufweisen muß.

Mit dem Zusammenhang (2.24) und (4.107) erhält man das entsprechende Polynom

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= \lambda^2 + (\hat{a}_2 + \hat{h}_2)\lambda + \hat{a}_1 + \hat{h}_1 \\ &= \lambda^2 + (3.62 - \hat{g}_2)\lambda + 3.3.\end{aligned}\tag{4.108}$$

Nach Anwendung des Hurwitz-Kriteriums / 21/ erhält man den folgenden Wertebereich, in dem der $\hat{g}_2$ -Parameter gewählt werden kann, damit die Stabilitätsbedingung erfüllt wird.

$$-\infty < \hat{g}_2 < 3.62.\tag{4.109}$$

Für die Simulationen wurde $\hat{g}_2 = 0.62$ gewählt.

Dementsprechend lautet die Systemmatrix $\hat{F}$ der Beobachterdynamik (3.30):

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & -3.0 \\ 1 & -3.3 \end{bmatrix}.\tag{4.110}$$

Die zugehörigen Eigenwerte liegen bei $-1.65 \pm j 0.526$. Entsprechend der Definition (3.2) läßt sich nun auch der Nominal-Parametervektor $\underline{p}^*$ angeben.

$$\underline{p}^* = [1.0, 0.0, 1.0, 1.8, 1.32, 0.62]^T . \quad (4.111)$$

4.6.3 Berechnung der Transformationsmatrizen $\underline{T}_j$

Zur Bestimmung der $3n^2$ Variablen $\underline{x}_j(t)$ ($j=1,2,\dots,3n$), die für die Bildung des parametrisierten Beobachters notwendig sind, werden jetzt noch die Transformationsmatrizen $\underline{T}_j$, ($j=1,2,\dots,n$) benötigt.

Die Anwendung der Sätze 3.1 und 3.2 liefert:

$$\text{adj} (s\underline{I} - \hat{\underline{F}}) = \underline{T}_i \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

für $i = 1$

$$\underline{T}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \hat{f}_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} \hat{f}_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

für $i = 2$

$$\underline{T}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{f}_1 \\ s \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} -\hat{f}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.116)$$

Werden nun (4.114) und (4.116) in (3.27) - (3.29) eingesetzt, erhält man die gesuchten $\underline{\xi}_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, 3n$).

4.6.4 Ermittlung der geschätzten Systemzustände $\tilde{\underline{x}}(t)$

Die geschätzten Zustandsgrößen des Systems $\tilde{\underline{x}}(t)$ ergeben sich mit (4.1) zu

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{M}(t) \tilde{\underline{p}}(t) + e^{\hat{\underline{F}} t} \tilde{\underline{x}}(0), \quad (4.117)$$

wobei

$$\underline{M}(t) = [\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2, \dots, \underline{\xi}_{3n}]$$

und

$$\tilde{\underline{p}}(t) = [p_1(t) \dots p_4(t), p_5^*, p_6^*]^T.$$

$\tilde{p}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) stellen die momentanen Parameterschätzungen dar, die sich durch die kontinuierliche Adaption ergeben. Die restlichen n -Parameter (p_5^*, p_6^*) brauchen nicht ermittelt werden, da diese durch die Auslegung des Beobachters fest vorgegeben sind.

Bei Kenntnis einzelner Systemparameter würde sich, wie in / 5 / gezeigt, ebenfalls die Anzahl der Integratoren zur Realisierung des Adaptionsgesetzes verringern.

Bei den durchgeführten Simulationen wurde der Ausgang des Systems $y(t)$, wie in Kapitel 4.5.2 beschrieben, gestört. Die Amplitude der Störung betrug ca. 15 % von der max. Ausgangsgröße $y(t)$.

Es wurden beide Verfahren zur Rekonstruktion der Zustände $\underline{x}(t)$ angewendet. Da sich jedoch keine wesentlichen Unterschiede in den Ergebnissen zeigten, beschränken sich die folgenden Darstellungen auf das "Zweite Verfahren" aus Kapitel 4.5.3.2.

Somit müssen noch die Beobachterzustände $\tilde{\underline{x}}(t)$ (4.117) mit Hilfe von (4.95) und (4.99) ergänzt werden.

Die geschätzten Systemzustände sind somit

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) + \left[\hat{g}_2 - \frac{\hat{g}_1}{\hat{a}_1} \hat{a}_2 \right] L(t) \quad (4.118)$$

$$x_2(t) = \tilde{x}_2(t) - \frac{\hat{g}_1}{\hat{a}_1} L(t) . \quad (4.119)$$

Werden nun noch die unbestimmten Parameter unter Berücksichtigung von Kapitel 4.2 zu

$$k = 1.0 \quad q = 0.99 \quad \underline{G} = \underline{1} \cdot 5.0 \cdot E03$$

gewählt, kann das Adaptionsgesetz

$$(4.52) \quad \dot{\underline{p}}(t) = -k(.) \underline{G} [\underline{r}(t) + \underline{R}(t) \underline{\tilde{p}}(t)]$$

mit

$$(4.49) \quad \dot{\underline{r}}(t) = -q \underline{r}(t) + [\underline{c}^T e^{\hat{F}t} \hat{\underline{x}}(0) - y(t)] \underline{z}(t)$$

$$\underline{r}(0) = \underline{0}$$

sowie

$$(4.50) \quad \dot{\underline{R}}(t) = -q \underline{R}(t) + \underline{z}(t) \underline{z}^T(t)$$

$$\underline{R}(0) = \underline{0}$$

realisiert werden.

4.6.5 Simulationsergebnisse

Zur Realisierung des Modells nach Kapitel 4.6.1 wurde ein bestehendes Simulationsprogramm verwendet, das auf dem Digitalrechner des Rechenzentrums der Universität Bremen implementiert ist. Es handelt sich hierbei um das Programmpaket SLCS IV /34/, das es ermöglicht, kontinuierliche Systeme, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden, nachzubilden.

Die auf den folgenden Seiten abgebildeten Diagramme stellen die Ergebnisse dar, die der adaptive PI-Beobachter und der Beobachterentwurf nach /17/, bei gestörtem Meßsignal $y_s(t)$, liefern.

Die wählbaren Parameter des PI-Beobachters wurden so ausgelegt, daß beide Systeme die gleiche Beobachterdynamik $\hat{F}$ besitzen. Ebenso wurde das Adaptionsverfahren identisch ausgelegt.

Die Abbildungen 4.5 und 4.6 zeigen den Adaptionsverlauf der normierten Parameter. Da die Systemgröße $b_1 = 0$ ist, konnte sie aus Normierungsgründen nicht mit dargestellt werden. Ihr zeitliches Verhalten entspricht jedoch dem der anderen Werte. Deutlich ist zu erkennen, daß nur beim PI-Beobachter die Parameteradaption nach ca. 12 Sekunden abgeschlossen ist.

Entsprechendes Verhalten zeigen die Zustandsfehler $\underline{\sigma}(t)$, die in den Diagrammen 4.7 und 4.8 dargestellt sind. Auch hier ist zu sehen, daß der Entwurf nach /17/, wie auch schon in Kapitel 4.5.2 gezeigt, nicht dazu in der Lage ist, die Auswirkungen der vorhandenen Störung zu eliminieren.

Eine der nach Kapitel 4.4 geforderten Einganggröße ist in Bild 4.9 wiedergegeben. Es handelt sich hier um die Funktion $u(t) = \sin(t) + \sin(2.5 \cdot t)$.

Die graphische Darstellung 4.10 zeigt den Verlauf der geschätzten Störgröße $\hat{s}(t)$, die mit Hilfe der zusätzlichen Zustandsgröße $L(t)$ nach Gleichung 4.69 gebildet wurde.

Auch hier wird die tatsächliche Störgröße $s(t) = 0.05$ nach ca. 12 Sekunden geschätzt.

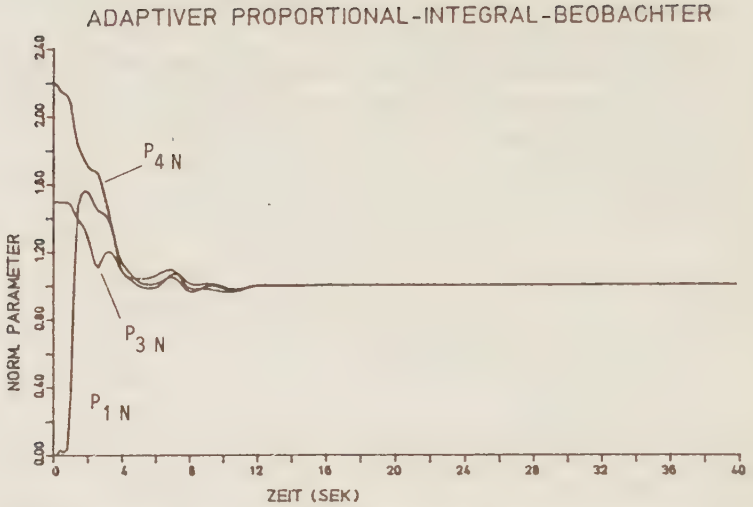


Bild 4.5 Normierte Parameter bei einem adapt. PI-Beobachter mit gestörter Meßgröße $y_s(t)$

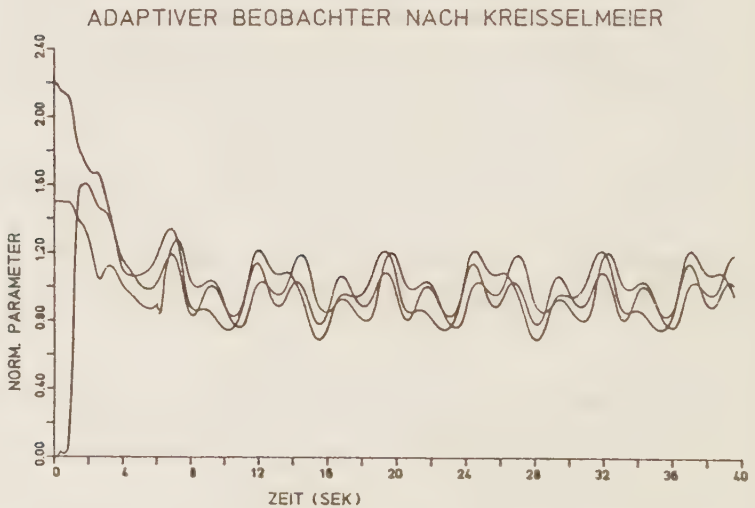


Bild 4.6 Normierte Parameter bei einem Entwurf nach "Kreisselmeier" mit gestörter Meßgröße $y_s(t)$

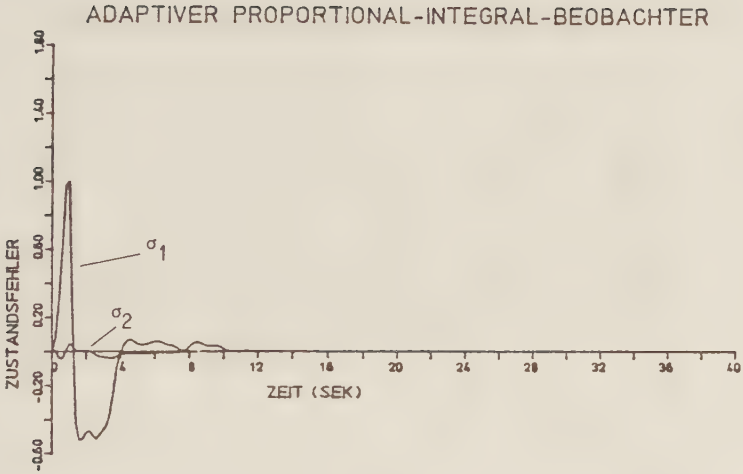


Bild 4.7 Zustandsfehler bei einem adapt. PI-Beobachter mit gestörter Meßgröße $y_s(t)$



Bild 4.8 Zustandsfehler bei einem Entwurf nach "Kreisselmeier" mit gestörter Meßgröße $y_s(t)$

ADAPTIVER PROPORTIONAL-INTEGRAL-BEOBACHTER

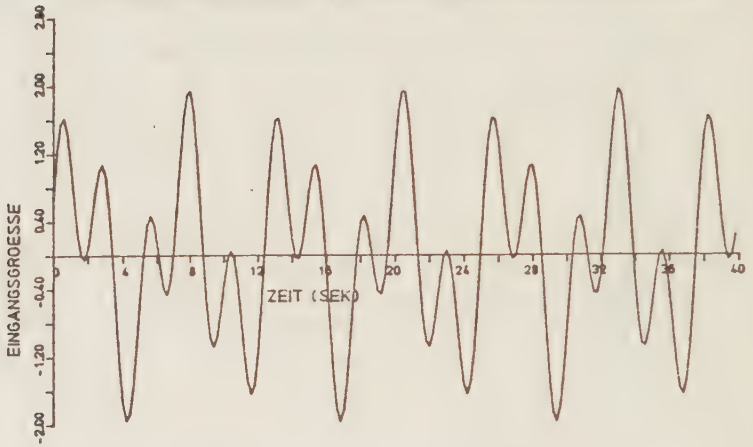


Bild 4.9 Eingangsgröße $u(t) = \sin(t) + \sin(2.5 * t)$

ADAPTIVER PROPORTIONAL-INTEGRAL-BEOBACHTER

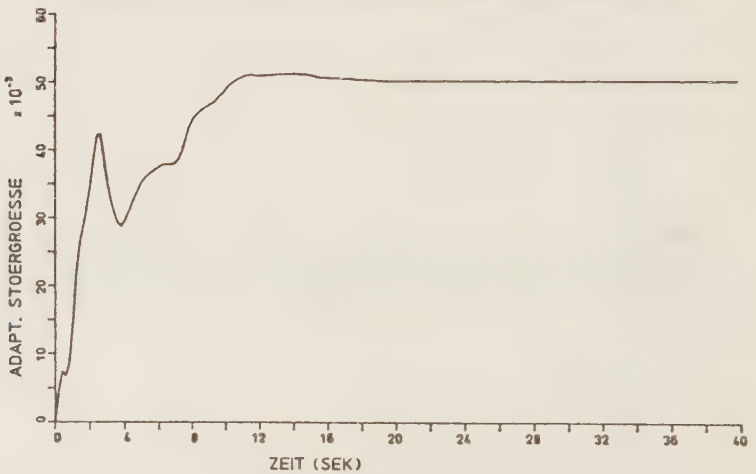


Bild 4.10 Verlauf der geschätzten Störgröße $\hat{s}(t)$

5. Übergang auf die zeitdiskrete Darstellungsweise

Die bisherigen Untersuchungen haben ergeben, daß eine realistische Implementierung eines kontinuierlichen adaptiven PI-Beobachters kaum durchführbar ist.

Durch die zusätzliche Dynamik des Beobachters vergrößert sich die ohnehin schon enorme Anzahl, der durch Operationsverstärker zu realisierenden Integratoren derart, daß als Lösung nur eine zeitdiskrete Form vertretbar ist. Der umfangreiche Hardwareaufwand zum Aufbau der Vierquadranten-Multiplizierer für die Matrizenoperationen würde somit auch entfallen.

Ein weiterer Vorteil der zeitdiskreten Ausführung mit Hilfe eines Digitalrechners besteht natürlich auch darin, daß der zu implementierende Beobachter schrittoptimal ausgelegt werden kann.

Es stellte sich die Frage, welches der bekannten zeitdiskreten multivarianten Verfahren, zur Minimierung des noch festzulegenden Fehlerkriteriums, angewendet werden sollte.

Da das Fehlerkriterium nicht in analytischer Form vorliegen wird, sondern aus den Zuständen eines noch zu definierenden dynamischen Systems gebildet wird, stehen nur Funktionswerte bis zum k -ten Abtastzeitpunkt zur Verfügung. Unter diesen Voraussetzungen wurde aus / 3 / ein Gradientenverfahren zweiter Ordnung, das sogenannte Newton-Raphson-Verfahren gewählt, um eine maximale Konvergenzgeschwindigkeit zu erzielen.

6. Zeitdiskretisierung des PI-Beobachters

Ausgangslage ist ein zeitdiskretes, lineares Einfachsystem, das die gleichen Voraussetzungen wie in Kapitel 1. erfüllt. Die Gleichungen (6.1) und (6.2) stellen die entsprechende Beschreibung dar.

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \underline{x}(k) + \underline{b}_d u(k) \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (6.1)$$

$$y(k) = \underline{c}_d^T \underline{x}(k) . \quad (6.2)$$

Auch in diesem Fall läßt sich eine Transformationsmatrix angeben, mit deren Hilfe das obige System in der sogenannten Beobachter-Normalform dargestellt werden kann. / 1 /

Die Systemmatrix $\underline{A}_d$ bzw. die Vektoren $\underline{b}_d$ und $\underline{c}_d$ erhalten dann folgende Struktur:

$$\underline{A}_d = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0}^T_{n-1} & -a_{1d} \\ \hline & \vdots \\ & \vdots \\ \underline{I}_{n-1} & -a_{nd} \end{array} \right] , \quad (6.3)$$

$$\underline{b}_d = \left[b_{1d} \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ b_{nd} \right]^T , \quad (6.4)$$

$$\underline{c}_d^T = \left[0 \ \cdot \ \cdot \ 0 \ 1 \right] .$$

Gesucht sind wieder die Parameter a_{id} , b_{id} ($i=1,2,\dots,n$), mit denen das System (6.1), (6.2) vollständig beschrieben wird.

Ausgehend von der mathematischen Beschreibung (2.1), (2.2) und (2.8) für den kontinuierlichen Fall, erhält man für die zeitdiskrete Darstellung des PI-Beobachters die folgenden Gleichungen:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \hat{\underline{F}}_d \hat{\underline{x}}(k) + \hat{\underline{b}}_d u(k) + \hat{\underline{h}}_d y(k) + \hat{\underline{g}}_d L(k) \quad (6.6)$$

$$L(k+1) = L(k) + [y(k) - \hat{y}(k)] \quad (6.7)$$

$$\hat{y}(k) = \hat{\underline{c}}_d^T \hat{\underline{x}}(k). \quad (6.8)$$

Mit den Definitionen:

$$\hat{\underline{F}}_d := \left[\begin{array}{c|c} \underline{0}_{n-1}^T & -\hat{f}_{1d} \\ \hline & \vdots \\ & -\hat{f}_{nd} \\ \hline \underline{I}_{n-1} & \end{array} \right] \quad (6.9)$$

$$\hat{\underline{b}}_d := [\hat{b}_{1d} \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \hat{b}_{nd}]^T \quad (6.10)$$

$$\hat{\underline{h}}_d := [\hat{h}_{1d} \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \hat{h}_{nd}]^T \quad (6.11)$$

$$\hat{\underline{g}}_d := [\hat{g}_{1d} \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \hat{g}_{nd}]^T \quad (6.12)$$

$$\hat{\underline{c}}_d^T := [0 \ \cdot \ \cdot \ 0 \ 1]. \quad (6.13)$$

Da durch die Zeitdiskretisierung die Integratoren durch Summierer ersetzt werden, wird der Begriff des Proportional-Summen-Beobachter (PS-Beobachter) eingeführt.

Mit der Voraussetzung, daß keine Parameterabweichungen zwischen System und Beobachter vorliegen, ergibt sich

$$\hat{\underline{F}}_d = \underline{A}_d - \hat{\underline{h}}_d \hat{\underline{c}}_d^T \quad (6.14)$$

$$\underline{b}_d = \hat{\underline{b}}_d \quad (6.15)$$

Durch die spezielle Form von $\hat{\underline{F}}_d$ erhält man

$$\hat{h}_{id} = \hat{f}_{id} - a_{id} \quad (6.16)$$

$$\hat{b}_{id} = b_{id} \quad (6.17)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Mit der Definition des Zustandsfehlers

$$\underline{\sigma}(k) := \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k) \quad (6.18)$$

ergibt sich mit (6.1) und (6.6) die Beschreibung der Fehlerdynamik

$$\underline{\sigma}(k+1) = \hat{\underline{F}}_d \underline{\sigma}(k) - \hat{\underline{g}}_d L(k) \quad (6.19)$$

Aus (6.7) wird mit den Gleichungen (6.2), (6.8) und (6.18):

$$L(k+1) = L(k) + \hat{\underline{c}}_d^T \underline{\sigma}(k) \quad (6.20)$$

Eine Gesamtdarstellung läßt sich nun mit (6.21) angeben.

$$\begin{bmatrix} \underline{\sigma}(k+1) \\ L(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_d & -\hat{\underline{g}}_d \\ \hat{\underline{c}}_d^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\sigma}(k) \\ L(k) \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Zur weiteren Vereinfachung werden die folgenden Definitionen eingeführt:

$$\underline{P}_d := \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_d & -\hat{\underline{g}}_d \\ \hat{\underline{c}}_d^T & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\underline{\chi}(k) := \begin{bmatrix} \underline{\sigma}(k) \\ L(k) \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

$\underline{P}_d$ enthält das gewünschte Fehlerverhalten, wenn die Parameter des Systems mit denen des Beobachters übereinstimmen.

Aus der Lösung von (6.21)

$$\underline{\chi}(k) = \underline{P}_d^k \underline{\chi}(0) \quad (6.24)$$

ist ersichtlich, daß für den Fall stabiler Eigenwerte von $\underline{P}_d$, also $|\gamma_i(\underline{P}_d)| < 1$ für $(i=1,2,\dots,n+1)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\chi}(k) = \underline{0} \quad (6.25)$$

wird.

Mit der Definition

$$\underline{p}_d^k := \varphi_{dij}(k) \quad (6.26)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n+1)$$

läßt sich (6.24) auch wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} \underline{\sigma}(k) \\ L(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{d1,1}(k) & \dots & \varphi_{d1,n}(k) & \varphi_{d1,n+1}(k) \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \varphi_{dn,1}(k) & \dots & \varphi_{dn,n}(k) & \cdot \\ \varphi_{dn+1,1}(k) & \dots & & \varphi_{dn+1,n+1}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\sigma}(0) \\ L(0) \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Weil der Anfangswert des zusätzlichen Summierers frei wählbar ist, wird er aus Vereinfachungsgründen auf Null gesetzt, und somit ergibt sich die Dynamik des Zustandsfehlers $\underline{\sigma}(k)$ mit

$$\underline{\Phi}'(k) := \{ \varphi_{dij}(k) \} \quad (6.28)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n)$$

zu

$$\underline{\sigma}(k) = \underline{\Phi}'(k) \underline{\sigma}(0) \quad (6.29)$$

6.1 Strukturbild des PS-Beobachters

Bild 6.1 zeigt das Strukturbild des PS-Beobachters entsprechend der Gleichungen (6.6) und (6.7).

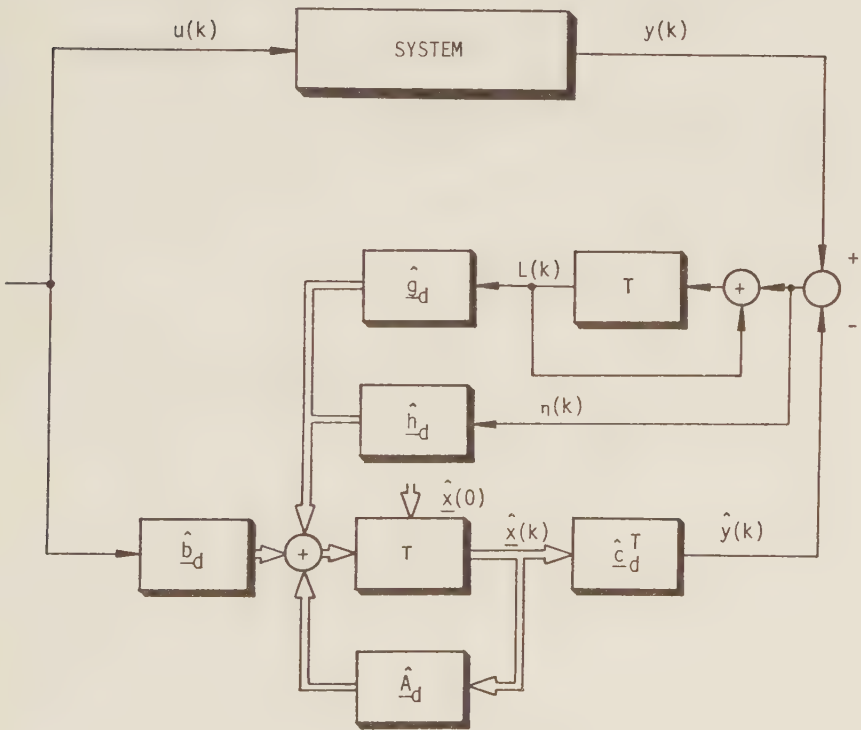


Bild 6.1 Strukturbild des PS-Beobachters

7. Herleitung des parametrisierten PS-Beobachters

Die Lösung der Gleichung (6.6) lautet: / 10 /

$$\hat{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{F}}_d^k \hat{\underline{x}}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\underline{F}}_d^{k-1-i} \begin{bmatrix} \underline{I} u(i) & | & \underline{I} y(i) & | & \underline{I} L(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}}_d \\ \hat{\underline{h}}_d \\ \hat{\underline{g}}_d \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Mit der Definition des Parametervektors

$$\underline{p}_d := \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}}_d \\ \hat{\underline{h}}_d \\ \hat{\underline{g}}_d \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

($\underline{p}_d$ enthält $3n$ Komponenten)

und der Voraussetzung, daß $\underline{p}_d = \text{konstant}$, kann er aus der Summe herausgezogen werden.

$$\hat{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{F}}_d^k \hat{\underline{x}}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\underline{F}}_d^{k-1-i} \begin{bmatrix} u(i) & | & y(i) & | & L(i) \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & u(i) & & y(i) & & L(i) \end{bmatrix} \underline{p}_d. \quad (7.3)$$

Die j -te Spalte der obigen Summe lautet:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \hat{\underline{F}}_d^{k-1-i} \underline{e}_j u(i). \quad (7.4)$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

$\underline{e}_j$ entspricht der j -ten Spalte der Einheitsmatrix

Entsprechendes gilt für $y(i)$ und $L(i)$. Es treten also $3n$ Gleichungen der Form (7.4) auf.

Der Ausdruck (7.4) kann auch als Lösung der folgenden Differenzgleichungen aufgefaßt werden:

$$\underline{x}_j(k+1) = \hat{F}_d \underline{x}_j(k) + \underline{e}_j u(k) \quad \underline{x}_j(0) = \underline{0} . \quad (7.5)$$

Entsprechend gilt:

$$\underline{x}_{j+n}(k+1) = \hat{F}_d \underline{x}_{j+n}(k) + \underline{e}_j y(k) \quad \underline{x}_{j+n}(0) = \underline{0} \quad (7.6)$$

$$\underline{x}_{j+2n}(k+1) = \hat{F}_d \underline{x}_{j+2n}(k) + \underline{e}_j L(k) \quad \underline{x}_{j+2n}(0) = \underline{0} . \quad (7.7)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Führt man weiterhin die Definition (7.8)

$$\underline{M}(k) := [\underline{x}_1(k), \underline{x}_2(k) \dots \underline{x}_{3n}(k)] \quad (7.8)$$

ein, so wird aus (7.5) - (7.7)

$$\underline{M}(k+1) = \hat{F}_d \underline{M}(k) + [\underline{I} u(k) \mid \underline{I} y(k) \mid \underline{I} L(k)] . \quad (7.9)$$

$$\underline{M}(0) = \underline{0}_{n, 3n}$$

Mit der Lösung $\underline{M}(k)$ läßt sich nun (7.3) wie folgt darstellen:

$$\hat{\underline{x}}(k) = \hat{F}_d^k \hat{\underline{x}}(0) + \underline{M}(k) \underline{p}_d . \quad (7.10)$$

7.1 Minimierung des dynamischen Systems M(k)

Analog zum kontinuierlichen System läßt sich auch in diesem Fall eine Reduzierung auf $3n$ Differenzengleichungen durchführen. Die hierzu benötigten Sätze 3.1 und 3.2 gelten entsprechend. Mit ihnen erhält man den benötigten Zusammenhang:

$$(\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \underline{e}_j = \underline{I}_j (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d^T)^{-1} \underline{e}_n. \quad (7.11)$$

Nach Anwendung der Z-Transformation auf die Gleichungen (7.5) - (7.7) ergibt sich

$$\underline{x}_j(z) = (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \underline{e}_j u(z) \quad (7.12)$$

$$\underline{x}_{j+n}(z) = (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \underline{e}_j y(z) \quad (7.13)$$

$$\underline{x}_{j+2n}(z) = (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \underline{e}_j L(z). \quad (7.14)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Wird jetzt ein Vergleich mit den folgenden Definitionen

$$\underline{z}_1(z) := (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d^T)^{-1} \underline{e}_n u(z) \quad (7.15)$$

$$\underline{z}_2(z) := (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d^T)^{-1} \underline{e}_n y(z) \quad (7.16)$$

$$\underline{z}_3(z) := (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d^T)^{-1} \underline{e}_n L(z) \quad (7.17)$$

unter Berücksichtigung von (7.11) durchgeführt, so lassen sich die Gleichungen (7.12) - (7.14) auch wie folgt darstellen:

$$\underline{x}_j(z) = \underline{T}_j \underline{z}_1(z) \quad (7.18)$$

$$\underline{x}_{j+n}(z) = \underline{T}_j \underline{z}_2(z) \quad (7.19)$$

$$\underline{x}_{j+2n}(z) = \underline{T}_j \underline{z}_3(z) . \quad (7.20)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Nach dem Zusammenfassen der Einzelsysteme (7.12) - (7.14) und der Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich die Gesamtbeschreibung der Beobachterdynamik

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_1(k+1) \\ \underline{z}_2(k+1) \\ \underline{z}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_d^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \hat{\underline{F}}_d^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \hat{\underline{F}}_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_1(k) \\ \underline{z}_2(k) \\ \underline{z}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{e}_n & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{e}_n & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \\ L(k) \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

mit den Anfangswerten

$$\underline{z}_1(0) = \underline{z}_2(0) = \underline{z}_3(0) = \underline{0} , \quad (7.22)$$

sowie den Lineartransformationen

$$\underline{x}_j(k) = \underline{T}_j \underline{z}_1(k) \quad (7.23)$$

$$\underline{x}_{j+n}(k) = \underline{T}_j \underline{z}_2(k) \quad (7.24)$$

$$\underline{x}_{j+2n}(k) = \underline{T}_j \underline{z}_3(k) . \quad (7.25)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

mit deren Hilfe es möglich ist, den parametrisierten PS-Beobachter vollständig zu beschreiben.

Die Elemente der Transformationsmatrix $\underline{T}_j$ werden mit Hilfe des Satzes 3.2 durch Koeffizientenvergleich ermittelt.

7.2 Strukturbild des parametrisierten PS-Beobachters

Mit Hilfe der Gleichungen (6.7), (7.10), (7.23) - (7.25) und (7.21) läßt sich das entsprechende Strukturbild des parametrisierten PS-Beobachters wie folgt angeben:

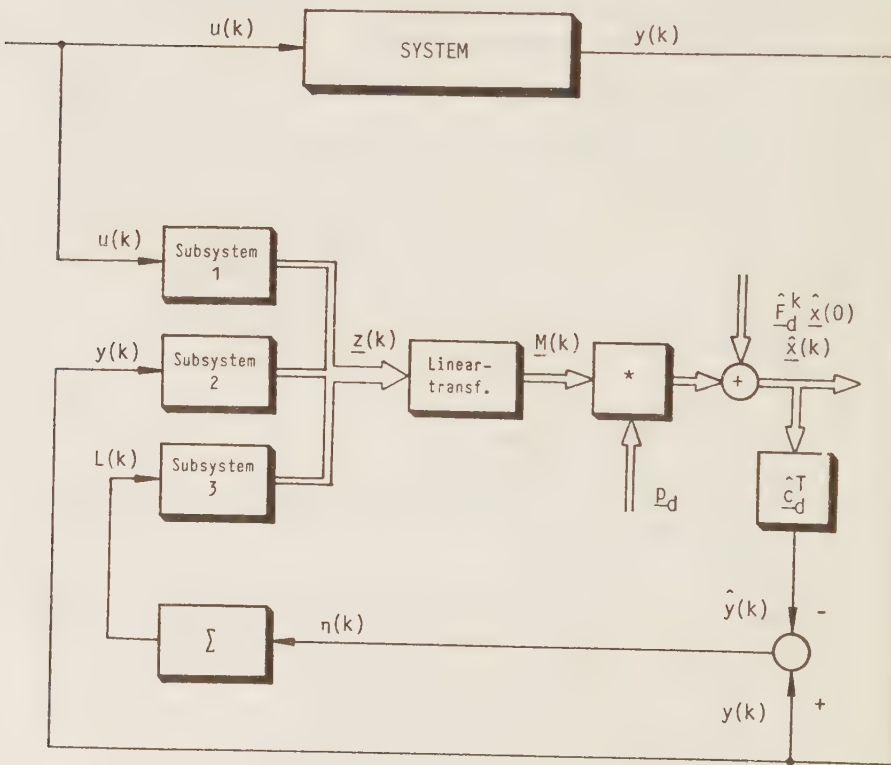


Bild 7.1 Strukturbild des parametrisierten PS-Beobachters

7.3 Fehlerdynamik des PS-Beobachters

7.3.1 Betrachtung des Zustandsfehlers

Enthält der PS-Beobachter die gleichen Parameter wie das System, gilt also $\underline{p}_d = \underline{p}_d^*$ ($\underline{p}_d^*$ = Nominalparameter) und stimmen weiterhin die Anfangswerte $\underline{x}(0)$ und $\hat{\underline{x}}(0)$ überein, so läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (6.29) und (7.10) der Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ auch wie folgt angeben:

$$\underline{x}(k) = \underline{M}(k) \underline{p}_d^* + \underline{\hat{F}}_d^k \underline{x}(0) + \underline{\phi}'(k) \underline{\sigma}(0) . \quad (7.26)$$

Wird jetzt entsprechend der Definition des Zustandsfehlers $\underline{\sigma}(k)$ (7.10) von (7.26) subtrahiert, so entsteht

$$\underline{\sigma}(k) = \underline{M}(k) (\underline{p}_d^* - \underline{p}_d) + \underline{\phi}'(k) \underline{\sigma}(0) . \quad (7.27)$$

Nach der Einführung des Parameterfehlers

$$\Delta \underline{p}_d := \underline{p}_d^* - \underline{p}_d \quad (7.28)$$

vereinfacht sich (7.27) zu

$$\underline{\sigma}(k) = \underline{M}(k) \Delta \underline{p}_d + \underline{\phi}'(k) \underline{\sigma}(0) . \quad (7.29)$$

Aus Gleichung (7.29) erkennt man, daß sich für den Fall $\underline{p}_d \neq \underline{p}_d^*$ der Zustandsfehler in zwei Komponenten aufteilt:

a) Parameterfehler

b) Beobachtungsfehler (dieser geht in Abhängigkeit von $\underline{\phi}'(k)$ stets gegen Null)

7.3.2 Betrachtung des Ausgangsfehlers

Der Ausgangsfehler $\eta(k)$ läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (6.2) und (6.8) wie folgt definieren:

$$\eta(k) := y(k) - \hat{y}(k) . \quad (7.30)$$

Eine andere Darstellungsform ergibt sich unter Verwendung von (6.18) und (7.29).

$$\eta(k) = \underline{c}_d^T \underline{M}(k) (\underline{p}_d^* - \underline{p}_d) + \underline{c}_d^T \underline{\Phi}'(k) \underline{a}(0) . \quad (7.31)$$

Zur weiteren Vereinfachung von (7.31) wird die Gleichung (7.12) mit $\underline{c}_d^T$ vormultipliziert. So entsteht

$$\underline{c}_d^T \underline{\xi}_j(z) = \underline{c}_d^T (z\underline{I} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \underline{e}_j u(z) . \quad (7.32)$$

Da

$$\underline{c}_d^T = \underline{e}_n^T$$

folgt mit der Identität (7.33)

$$\underline{e}_n^T (z\underline{I} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \underline{e}_j = \underline{e}_j^T (z\underline{I} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \underline{e}_n \quad (7.33)$$

$$\underline{c}_d^T \underline{\xi}_j(z) = \underline{e}_j^T (z\underline{I} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \underline{e}_n u(z) . \quad (7.34)$$

Ein Vergleich mit (7.15) liefert schließlich

$$\underline{c}_d^T \underline{\xi}_j(z) = \underline{e}_j^T \underline{z}_1(z) . \quad (7.35)$$

Analog ergeben sich

$$\underline{c}_d^T \underline{\varepsilon}_{j+n}(z) = \underline{e}_j^T \underline{z}_2(z) \quad (7.36)$$

$$\underline{c}_d^T \underline{\varepsilon}_{j+2n}(z) = \underline{e}_j^T \underline{z}_3(z) \quad (7.37)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Nach der Rücktransformation in den Zeitbereich entsteht durch Zusammenfassung der Gleichungen (7.35) - (7.37) und unter Berücksichtigung von (7.8) sowie der Definition

$$\underline{z}(k) := [\underline{z}_1^T(k), \underline{z}_2^T(k), \underline{z}_3^T(k)]^T \quad (7.38)$$

$$\underline{z}^T(k) = \underline{c}_d^T \underline{M}(k) . \quad (7.39)$$

Wird der obige Ausdruck in (7.31) eingesetzt, so entsteht der Ausgangsfehler

$$(7.40)$$

$$\eta(k) = \underline{z}^T(k) (\underline{p}_d^* - \underline{p}) + \underline{c}_d^T \underline{\phi}'(k) \underline{\sigma}(0) . \quad (7.40)$$

8. Der adaptive PS-Beobachter

Für die weiteren Betrachtungen wird nun der in Kapitel 7. hergeleitete PS-Beobachter zur Ermittlung der Systemzustände und -parameter des Prozesses (6.1), (6.2) angewendet.

Der Parametervektor $\underline{p}_d$ ist jedoch nicht mehr konstant, sondern wird nun durch die momentane Parameterschätzung $\tilde{\underline{p}}_d(k)$ ersetzt. Der Schätzvektor $\tilde{\underline{p}}_d(k)$ wird aus einem noch zu def. Adaptionsgesetz gewonnen. Die mathematische Beschreibung dieses Beobachters lautet:

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{F}}_d^k \tilde{\underline{x}}(0) + \underline{M}(k) \tilde{\underline{p}}_d(k), \quad (8.1)$$

wobei sich $\underline{M}(k)$ aus dem dynamischen System (7.9) ergibt.

Die Ausgangsgröße des nun adaptiven Beobachters, läßt sich mit (7.39) wie folgt darstellen:

$$\tilde{y}(k) = \underline{z}^T(k) \tilde{\underline{p}}_d(k) + \underline{c}_d^T \hat{\underline{F}}_d^k \tilde{\underline{x}}(0). \quad (8.2)$$

Aus (8.2) ist erkennbar, daß die Ausgangsgröße nach Beendigung des Einschwingvorganges nur noch von dem dynamischen System $\underline{M}(k)$ und der momentanen Parameterschätzung $\tilde{\underline{p}}_d(k)$ abhängt.

8.1 Festlegung des Fehlerkriteriums und Bildung des Adaptionsgesetzes

Wie auch schon in Kapitel 5. dargestellt, wurde aus Gründen der maximalen Konvergenzgeschwindigkeit eine spezielle Gradientenmethode, das sog. "Newton - Raphson - Verfahren", gewählt. Es lautet:

$$\bar{p}_d(k+1) = \bar{p}_d(k) - \left[\frac{\partial^2 J}{\partial \bar{p}_d \partial \bar{p}_d^T} \right]^{-1} \frac{\partial J}{\partial \bar{p}_d} \bigg|_{\bar{p}_d = \bar{p}_d(k)} \quad (8.3)$$

Die Herleitung des obigen Verfahrens befindet sich u. a. in / 8 /.

Da zur Realisierung von (8.3) die zweite Ableitung des Fehlerkriteriums benötigt wird, wurde das gleiche Kriterium, wie in Kapitel 4.3 auch schon für den kontinuierlichen Fall, angewendet. In der zeitdiskreten Darstellung lautet es:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} n^2(i) \quad (8.4)$$

mit $0 < q < 1$

Nachdem der durch (7.31) beschriebene Ausgangsfehler quadriert und in (8.4) eingesetzt wurde, erhält man unter Verwendung von (6.18) und rechtsseitiger Multiplikation von (7.39) mit $\underline{p}_d^*$

$$J(k) = \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} \left[\hat{\underline{c}}_d^T \underline{M}(i) \underline{p}_d^* - \hat{\underline{c}}_d^T \underline{M}(i) \bar{\underline{p}}_d(i) + \hat{\underline{c}}_d^T \underline{\Phi}(i) \underline{x}(0) - \hat{\underline{c}}_d^T \underline{\Phi}(i) \hat{\underline{x}}(0) \right]^2 \quad (8.5)$$

Mit dem Ausgang des Systems (7.26) entsteht aus der obigen Gleichung

$$J(k) = \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} [y(i) - \underline{z}^T(i) \tilde{p}_d(i) - \hat{c}_d^T \hat{F}_d^i \hat{x}(0)]^2. \quad (8.6)$$

Die Ableitung von (8.6) nach dem Parametervektor ergibt:

$$\frac{\partial J(k)}{\partial \tilde{p}_d(k)} = 2 \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} [\hat{c}_d^T \hat{F}_d^i \hat{x}(0) - y(i)] \underline{z}(i) + 2 \sum_{i=0}^{k-1} \underline{z}(i) \underline{z}^T(i) \tilde{p}_d(i). \quad (8.7)$$

Die Definitionen

$$\underline{r}(k) := \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} [\hat{c}_d^T \hat{F}_d^i \hat{x}(0) - y(i)] \underline{z}(i) \quad (8.8)$$

$$\underline{R}(k) := \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} \underline{z}(i) \underline{z}^T(i) \quad (8.9)$$

können als Lösungen folgender zeitdiskreter Systeme aufgefaßt werden:

$$\underline{r}(k+1) = q \underline{r}(k) + [\hat{c}_d^T \hat{F}_d^k \hat{x}(0) - y(k)] \underline{z}(k) \quad (8.10)$$

$$\underline{R}(k+1) = q \underline{R}(k) + \underline{z}(k) \underline{z}^T(k). \quad (8.11)$$

$$\text{mit } \underline{r}(0) = \underline{0}$$

$$\underline{R}(0) = \underline{0}$$

Werden jetzt (8.8) und (8.9) in Gleichung (8.7) eingesetzt, erhält man für $\tilde{p}_d(i) = \text{konstant}$

$$\frac{aJ(k)}{\tilde{a}\tilde{p}_d(k)} = 2 [\underline{r}(k) + \underline{R}(k) \tilde{p}_d(k)] . \quad (8.12)$$

Für die zweite Ableitung von (8.4) ergibt sich:

$$\frac{a^2 J(k)}{\tilde{a}\tilde{p}_d(k) \tilde{a}\tilde{p}_d^T(k)} = 2 \underline{R}(k) . \quad (8.13)$$

Mit Hilfe der obigen Gleichungen kann nun entsprechend (8.3) das Adaptionsgesetz wie folgt realisiert werden:

$$\tilde{p}_d(k+1) = \tilde{p}_d(k) - 2 [\underline{R}(k)]^{-1} [\underline{r}(k) + \underline{R}(k) \tilde{p}_d(k)] . \quad (8.14)$$

Welche Voraussetzungen notwendig sind, damit die Inverse von $\underline{R}(k)$ existiert, wird in Kapitel 8.3 behandelt.

8.2 Konvergenzanalyse

Die folgende Konvergenzanalyse wird für das durch (8.4) vorgegebene Fehlerkriterium durchgeführt.

Zunächst wird entsprechend (7.28) die Parameterfehlergleichung aufgestellt.

$$\Delta \tilde{p}_d(k+1) = \Delta \tilde{p}_d(k) - 2 \underline{g}(k) [\underline{r}(k) + \underline{R}(k) \tilde{p}_d(k)]. \quad (8.15)$$

Weiterhin wird $\underline{r}(k)$ durch (8.8) ersetzt.

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{p}_d(k+1) = \Delta \tilde{p}_d(k) - 2 \underline{g}(k) \underline{R}(k) \tilde{p}_d(k) - 2 \underline{g}(k) \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} [\hat{\underline{c}}_d^T \hat{\underline{F}}_d^i \hat{\underline{x}}(0) - \\ - y(i)] \underline{z}(i). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (7.26) kann durch linksseitige Multiplikation mit $\underline{c}_d^T$ der Ausgang des Systems $y(i)$ beschrieben werden. Berücksichtigt man weiterhin den Zusammenhang (6.18), so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{p}_d(k+1) = \Delta \tilde{p}_d(k) - 2 \underline{g}(k) [\underline{R}(k) \tilde{p}_d(k) + \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} \underline{c}_d^T \underline{\Phi}^T(i) \underline{a}(0) \underline{z}(i) - \\ - \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i-1} \underline{c}_d^T \underline{M}(i) \underline{p}_d^* \underline{z}(i)]. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Der letzte Term des obigen Ausdrucks läßt sich mit (7.39) vereinfachen, somit entsteht als endgültige Form des Parameterfehlers

$$\Delta \tilde{p}_d(k+1) = [I - 2 \underline{G}(k) \underline{R}(k)] \Delta \tilde{p}_d(k) - 2 \underline{G}(k) \sum_{i=0}^{k-1} \underline{c}_d^T(i) \underline{\sigma}(0) \underline{z}(i). \quad (8.18)$$

Damit der inhomogene Teil der vorgenannten Fehlergleichung gegen Null konvergiert, muß entsprechend (6.24) die $\underline{P}_d$ -Matrix stabile Eigenwerte aufweisen.

Erreicht man also, daß $|\lambda_i(\underline{P}_d)| < 1$ für $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ und wählt den "Forget-Faktor" im Intervall $0 < q < 1$, dann erzielt man ein Konvergenzverhalten mit dem Grad von $\min\{\lambda_{\max}, q\}$.

Unter der Annahme, daß der Zustandsfehler $\underline{\sigma}(0) = \underline{0}$ ist, erhält man die homogene Differenzengleichung

$$\Delta \tilde{p}_d(k+1) = [I - 2 \underline{G}(k) \underline{R}(k)] \Delta \tilde{p}_d(k). \quad (8.19)$$

Auch hier konvergiert der Parameterfehler für asymptotisch stabile Eigenwerte gegen Null, wenn

$$|\lambda_i [I - 2 \underline{G}(k) \underline{R}(k)]| < 1 \quad \text{für } (i = 1, 2, \dots, 3n) \quad (8.20)$$

Die maximale Konvergenzgeschwindigkeit wird für

$$\underline{I} - 2 \underline{G} \underline{R}(k) \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad (8.21)$$

erreicht.

Somit muß

$$\underline{G}(k) = \frac{1}{2} \underline{R}(k)^{-1} \quad (8.22)$$

gewählt werden, um ein schrittoptimales Verhalten des Parameterfehlers zu erzielen. Ein Vergleich mit (8.14) zeigt, daß das "Newton-Raphson-Verfahren" genau dieser Auslegung entspricht.

8.3 Anforderung an die Eingangsgröße $u(k)$

Gemäß Gleichung (8.14) wird zur Realisierung des Adaptionssatzes nach "Newton-Raphson" die inverse Matrix von $\underline{R}(k)$ benötigt. Nach [31] existiert $\underline{R}^{-1}(k)$ jedoch nur, wenn die Vektoren $\underline{z}(i)$ für $(i = 1, 2, \dots, k-1)$ linear voneinander unabhängig sind. Siehe hierzu auch (8.9).

Entsprechende Überlegungen wie in Kapitel 4.4 für den kontinuierlichen Fall, führen zu der folgenden Übertragungsfunktion:

$$\frac{n(z)}{u(z)} = \underline{c}_d^T (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \Delta \underline{b}_d + \underline{c}_d^T (\underline{zI} - \hat{\underline{F}}_d)^{-1} \Delta \underline{h}_d \underline{c}_d^T (\underline{zI} - \underline{A}_d)^{-1} \underline{b}_d. \quad (8.23)$$

Diese Übertragungsfunktion enthält höchstens $(n-1)$ konjugiert komplexe Nullstellen. Somit sind die Komponenten von $\underline{z}$ linear unabhängig für den Fall $\Delta \underline{b}_d \neq \underline{0}$, $\Delta \underline{h}_d \neq \underline{0}$, wenn die Eingangsgröße $u(k)$ mindestens aus n verschiedenen Frequenzen besteht.

8.4 Auswertung des zusätzlich zur Verfügung stehenden Signals $L(k)$

In Analogie zur kontinuierlichen Darstellung besteht auch in der zeitdiskreten Realisierung des PI-Beobachters die Möglichkeit, die zusätzlich zur Verfügung stehende Zustandsgröße $L(k)$ auszunutzen, um weitere Informationen über den Adaptionsverlauf zu erhalten.

8.4.1 Erkennen von Parameter- bzw. Zustandsfehlern bei unzureichender Anregung der Beobachterdynamik $z(k)$

Sollte die nach Kapitel 8.3 geforderte Eingangsgröße $u(k)$ nicht sichergestellt werden können, so kann unter bestimmten Voraussetzungen mit Hilfe der Zustandsgröße $L(k)$ überprüft werden, ob die Anregung des Adaptionsprozesses ausgereicht hat, die Systemparameter richtig zu ermitteln.

Die Dynamik des Zustandsfehlers $\underline{\sigma}(k)$ ergibt sich aus der Systembeschreibung des Systems (6.1), (6.2), sowie aus der des Beobachters (6.6), (6.8) zu

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(k+1) = & \underline{A}_d \underline{x}(k) + \underline{b}_d u(k) - \hat{\underline{A}}_d \hat{\underline{x}}(k) + \hat{\underline{h}}_d \hat{\underline{c}}_d^T \hat{\underline{x}}(k) - \hat{\underline{b}}_d u(k) - \\ & - \hat{\underline{h}}_d \hat{\underline{c}}_d^T \underline{x}(k) - \hat{\underline{g}}_d L(k) .\end{aligned}\tag{8.24}$$

Aus (6.18) folgt

$$\underline{x}(k) = \underline{\sigma}(k) + \hat{\underline{x}}(k) .\tag{8.25}$$

Wird die obige Gleichung in (8.24) eingesetzt, so entsteht mit der Definition (6.14) sowie der Identität $\underline{c}_d^T = \hat{\underline{c}}_d^T$

$$\underline{\sigma}(k+1) = \hat{\underline{F}}_d \underline{\sigma}(k) + (\underline{A}_d - \hat{\underline{A}}_d) \hat{\underline{x}}(k) + (\underline{b}_d - \hat{\underline{b}}_d) u(k) - \hat{\underline{g}}_d L(k). \quad (8.26)$$

Mit den folgenden Definitionen

$$\delta \underline{A}_d := \underline{A}_d - \hat{\underline{A}}_d \quad (8.27)$$

$$\delta \underline{b}_d := \underline{b}_d - \hat{\underline{b}}_d \quad (8.28)$$

vereinfacht sich der zuvor erwähnte Ausdruck zu

$$\underline{\sigma}(k+1) = \hat{\underline{F}}_d \underline{\sigma}(k) + \delta \underline{A}_d \hat{\underline{x}}(k) + \delta \underline{b}_d u(k) - \hat{\underline{g}}_d L(k). \quad (8.29)$$

Da nach Voraussetzung die $\hat{\underline{F}}_d$ -Matrix so ausgelegt wird, daß $|\lambda_i(\hat{\underline{F}}_d)| < 1$ für $(i = 1, 2, \dots, n)$, muß nur noch dafür gesorgt werden, daß der inhomogene Teil von Gleichung (8.29) für

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta \underline{A}_d \hat{\underline{x}}(k) + \delta \underline{b}_d u(k) - \hat{\underline{g}}_d L(k) \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.30)$$

wird.

In Analogie zum kontinuierlichen Fall, kann auch hier nur bei Kenntnis der Parameteränderung die Forderung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\sigma}(k) = 0$$

durch entsprechende Auslegung der $\hat{\underline{g}}$ -Parameter erreicht werden.

Strukturbedingt wird der Ausgangsfehler des PS-Beobachters, im Gegensatz zum Kalman-Beobachter, für den eingeschwungenen Zustand stets zu Null gebracht. Die Größe des Zustandsfehlers für den stationären Fall wird somit nicht von den $\hat{h}$ -Parametern beeinflusst.

Da abweichend vom kontinuierlichen Beobachter kein Element des $\hat{g}_d$ -Vektors direkt durch Koeffizientenvergleich vorgegeben wird, können alle $\hat{g}_d$ -Parameter entsprechend des Auslegungskriteriums gewählt werden, um einen Zustandsfehler zu erkennen, der durch ein $L(k) \neq 0$ für $k \rightarrow \infty$ angezeigt wird.

Die Auswertung der Simulationsergebnisse lieferte die gleichen Resultate wie die in Kapitel 4.5.1 für die zeitkontinuierliche Realisierung.

8.4.1.1 Auslegung der Elemente des Vektors $\hat{g}_d$

Da nach Voraussetzung die Beobachterdynamik stabile Eigenwerte aufweisen muß, also $|\lambda_i(\hat{F}_d)| < 1$ für $(i = 1, 2, \dots, n)$, können die $\hat{g}_d$ -Parameter nur innerhalb eines gewissen Wertebereiches gewählt werden, da diese die $\hat{f}_d$ -Parameter beeinflussen.

Wird nun ein Polynom $(n+1)$ ter Ordnung mit stabilen Eigenwerten vorgegeben, so erhält man durch Koeffizientenvergleich mit $\det(zI - \hat{P}_d)$ die notwendigen Gleichungen zur Berechnung der fehlenden Parameter.

Mit der Annahme, daß ein System mit zwei fest vorgegebenen, bekannten Parametersätzen vorliegt, d. h. zwei Arbeitspunkten, kann eine spezielle Auslegung des Vektors $\hat{g}_d$ mit Hilfe der Gleichung (8.30) durchgeführt werden. / 29 /

Abschließend muß noch eine Stabilitätsuntersuchung des entstehenden Untersystems $\hat{F}_d$ durchgeführt werden. Hierzu findet der folgende Satz Anwendung:

Satz 8.1 Das Kriterium von Zypkin / 33 /

Das Polynom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad a_n = 1$$

hat dann und nur dann sämtliche Nullstellen im Einheitskreis, wenn

a) $|a_0| < a_n$ ist und

b) das Polynom $(n-1)$ -ten Grades

$$P_1(z) = \frac{1}{z} \left[a_n P(z) - a_0 P(z^{-1}) z^n \right] = b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1}$$

ebenfalls nur Wurzeln im Einheitskreis hat.

Die Koeffizienten von P_1 berechnen sich zu:

$$b_{n-1-k} = a_n a_{n-k} - a_0 a_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Ein Beweis dieses Kriteriums über die Ljapunow-Methode wurde von Mansour / 27 / gegeben.

Mit Hilfe dieses Verfahrens ist es ferner möglich, durch die entstehenden Ungleichungen, Wertebereiche für die $n \hat{g}_d$ -Parameter vorzugeben, für die das Untersystem noch stabil ist.

8.4.2 Schrittoptimaler PS-Beobachter

Wie schon das Adaptionsgesetz nach Kapitel 8.1 soll nun auch die Beobachterdynamik schrittoptimal ausgelegt werden, um eine maximale Konvergenzgeschwindigkeit zu erreichen. In den folgenden Ausführungen wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen diese Forderung erfüllt werden kann.

Für den PS-Beobachter galt bei bekannten Parametern die Fehlergleichung:

$$(6.21) \quad \underline{\gamma}(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_d & -\hat{\underline{g}}_d \\ \hat{\underline{C}}_d^T & 1 \end{bmatrix} \underline{\gamma}(k).$$

Mit der Definition (6.22) ergab sich:

$$(6.23) \quad \underline{\gamma}(k) = \underline{P}_d^k \underline{\gamma}(0).$$

Ist die Matrix $\underline{P}_d$ nilpotent mit dem Index n , dann wird jeder Anfangsfehler $\underline{\gamma}(0)$ nach spätestens n Abtastschritten zu Null, d. h. System- und Beobachterzustände stimmen überein. Mit der Forderung, daß die Matrix $\underline{P}_d$ nilpotent mit dem Index n sein soll, folgt mit dem Satz von Cayley-Hamilton:

$$\det(z\underline{I} - \underline{P}_d) \stackrel{!}{=} z^n. \quad (8.32)$$

Daß die obige Forderung durch entsprechende Auslegung des Beobachters realisierbar ist, wird nachfolgend an einem System zweiter Ordnung dargestellt.

$$\det(z\underline{I} - \underline{P}_d) = z^3 + (\hat{f}_2 - 1) z^2 + (\hat{f}_1 - \hat{f}_2 + \hat{g}_2) z + \hat{g}_1 - \hat{f}_1. \quad (8.33)$$

Mit der Forderung "Schrittoptimal" folgt aus (8.32):

$$\hat{f}_2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.34)$$

$$\hat{f}_1 - \hat{f}_2 + \hat{g}_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.35)$$

$$\hat{g}_1 - \hat{f}_1 \stackrel{!}{=} 0. \quad (8.36)$$

Somit ergeben sich die Parameter des Untersystems $\hat{\underline{F}}_d$ zu

$$\hat{f}_1 = \hat{g}_1 \quad (8.37)$$

$$\hat{f}_2 = 1 \quad (8.38)$$

und die Auslegung der $\hat{g}_d$ -Parameter

$$\hat{g}_1 + \hat{g}_2 = 1. \quad (8.39)$$

Das entsprechende Polynom des Untersystems lautet:

$$P(z) = z^2 + \hat{f}_2 z + \hat{f}_1. \quad (8.40)$$

Da es stabil ausgelegt werden muß, gilt nach Zypkin (Kap. 8.4.1.1) / 11 /:

$$1 > |\hat{f}_1| \quad (8.41)$$

$$1 + \hat{f}_2 + \hat{f}_1 > 0 \quad (8.42)$$

$$1 - \hat{f}_2 + \hat{f}_1 > 0. \quad (8.43)$$

Mit $\hat{f}_1 = \hat{g}_1$ entsteht $1 > |\hat{g}_1|$.

Aus (8.42) ergibt sich $\hat{g}_1 > -2$ und aus (8.43) $\hat{g}_1 > 0$.

Somit kann der Wertebereich des Parameters $\hat{g}_1$ wie folgt angegeben werden:

$$0 < \hat{g}_1 < 1 \quad (8.44)$$

und für $\hat{g}_2$ gilt:

$$\hat{g}_2 = 1 - \hat{g}_1 \quad (8.45)$$

Diese Freiheit in der Auslegung der $\hat{g}_d$ -Parameter kann außerdem dazu verwendet werden, dem Untersystem ein bestimmtes dynamisches Verhalten vorzugeben.

Eine Auslegung für Systeme höherer Ordnung wird analog durchgeführt.

8.4.3 Rekonstruktion einer konstanten Störung, die auf dem Ausgang des Systems liegt

Auch für die zeitdiskrete Darstellungsform läßt sich ein Satz angeben, mit dessen Hilfe es möglich ist, eine konstante Störung nachzubilden, um deren Einfluß eliminieren zu können. Die Struktur des Gesamtsystems entspricht der von Kapitel 4.5.2 Bild 4.2.

Satz 8.2

Eine konstante Störung $s(k) = a\sigma_e(k)$ ($\sigma_e(k) \triangleq$ Einheitssprung), die der Ausgangsgröße $y(k)$ additiv überlagert ist, läßt sich bei Kenntnis der Prozeßparameter wie folgt nachbilden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{s}(k) = a, \quad (8.46)$$

wobei

$$\hat{s}(k) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{g}_i}{1 + \sum_{i=1}^n \hat{f}_i - \hat{h}_i(k)} L(k) \quad (8.47)$$

bzw. unter Berücksichtigung von Gleichung (6.16)

$$\hat{s}(k) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{g}_i}{1 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k)} L(k) . \quad (8.48)$$

Beweis

Die Systembeschreibung des PS-Beobachters

$$(6.6) \quad \hat{\underline{x}}(k+1) = \hat{\underline{F}}_d \hat{\underline{x}}(k) + \hat{\underline{b}}_d u(k) + \hat{\underline{h}}_d y(k) + \hat{\underline{g}}_d L(k)$$

$$(6.7) \quad L(k+1) = L(k) + (y(k) - \hat{y}(k))$$

ändert sich für den Fall einer Störung der Form

$$y_s(k) = y(k) + s(k) \quad (8.49)$$

in

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \hat{\underline{F}}_d \hat{\underline{x}}(k) + \hat{\underline{b}}_d u(k) + \hat{\underline{h}}_d [y(k) + s(k)] + \hat{\underline{g}}_d L(k) \quad (8.50)$$

$$L(k+1) = L(k) + [y(k) + s(k) - \hat{\underline{c}}_d^T \hat{\underline{x}}(k)]. \quad (8.51)$$

Mit der Voraussetzung, daß keine Parameterabweichungen zwischen dem System und Beobachter vorliegen, ergibt sich mit der Definition des Zustandsfehlers (6.18) die folgende Differenzengleichung:

$$\underline{\sigma}(k+1) = (\underline{A}_d - \hat{\underline{h}}_d \hat{\underline{c}}_d^T) \underline{\sigma}(k) - \hat{\underline{h}}_d s(k) - \hat{\underline{g}}_d L(k). \quad (8.52)$$

Berücksichtigt man nun noch den Zusammenhang (6.14), so erhält man

$$\underline{\sigma}(k+1) = \hat{\underline{F}}_d \underline{\sigma}(k) - \hat{\underline{h}}_d s(k) - \hat{\underline{g}}_d L(k). \quad (8.53)$$

Für den eingeschwungenen Zustand ($k \rightarrow \infty$) wird aus (8.53) und (8.49)

$$(\hat{\underline{F}}_d - \underline{I}) \underline{\sigma}(k) = \hat{\underline{h}}_d s(k) + \hat{\underline{g}}_d L(k) \quad (8.54)$$

$$0 = \hat{\underline{c}}_d^T \underline{\sigma}(k) + s(k) = \sigma_n(k) + s(k) . \quad (8.55)$$

Einsetzen von (8.55) in (8.54) und umstellen nach $s(k)$ liefert schließlich die gesuchte Gleichung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{s}(k) = s(k) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{g}_i}{1 + \sum_{i=1}^n \hat{f}_i - \hat{h}_i(k)} L(k) . \quad (8.56)$$

Somit kann also mit Hilfe der zusätzlichen Zustandsgröße $L(k)$ eine Störung $s(k)$ nachgebildet werden.

8.4.4 Ermittlung der Systemzustände $x(k)$ bei sprungförmiger Störung des Systemausgangs

In Analogie zum kontinuierlichen Beobachter, Kapitel 4.5.3, wird der Zustandsfehler $\underline{g}(k)$ für $k \rightarrow \infty$ ebenfalls konstant aber ungleich Null. Auch in der zeitdiskreten Realisierung können zwei Methoden angegeben werden, um die exakten Zustandsgrößen zu erhalten.

8.4.4.1 Erstes Verfahren

Nach den gleichen Überlegungen wie für die kontinuierliche Lösung, sieht das erste Verfahren eine Erweiterung der Systemdynamik vor, indem ein zusätzlicher Beobachter realisiert wird, der als Eingangsgrößen $u(k)$, sowie den bereinigten Meßwert

$$y_b(k) = y(k) + s(k) - \hat{s}(k) \quad (8.57)$$

erhält.

Unter Berücksichtigung von (8.46) nimmt der obige Ausdruck folgende Form an:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_b(k) = y(k). \quad (8.58)$$

Aufgrund der parametrisierten Darstellung braucht nur die Beobachterdynamik zusätzlich nachgebildet werden, die für die Ausgangsgröße $y_b(k)$ maßgebend ist.

Die notwendige Systemerweiterung lautet:

$$\underline{z}_4(k+1) = \underline{\hat{F}}_d^T \underline{z}_4(k) + \underline{e}_n y_b(k) \quad \underline{z}_4(0) = \underline{0} \quad (8.59)$$

Die zur Realisierung von Gleichung (7.8) erforderliche Lineartransformation

$$\underline{\xi}_{j+n}'(k) = \underline{T}_j \underline{z}_4(k) \quad (8.60)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

sowie die formelle Umbenennung

$$\underline{\xi}_j'(k) = \underline{\xi}_j(k) \quad (8.61)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

ermöglichen die Berechnung der Beobachtungszustände nach (7.10):

$$\hat{\underline{x}}'(k) = [\underline{\xi}_1'(k), \underline{\xi}_2'(k) \dots \underline{\xi}_{2n}'(k)] \bar{\underline{p}}_d(k) + \hat{\underline{F}}_d^k \hat{\underline{x}}(0). \quad (8.62)$$

Daraus folgt der entsprechende Zustandsfehlervektor

$$\underline{\sigma}'(k) = \underline{M}'(k) \Delta \bar{\underline{p}}_d + \underline{\Phi}'(k) \underline{\sigma}'(0) \quad (8.63)$$

der, wie schon gezeigt, für den eingeschwungenen Zustand gegen Null läuft.

8.4.4.2 Zweites Verfahren

Im Gegensatz zum ersten Verfahren ist keine dynamische Systemerweiterung zur Rekonstruktion der Systemzustände notwendig. Betrachtet man den eingeschwungenen Zustand, so erhält man aus (8.48) unter Berücksichtigung von (6.18) eine Darstellung der n-ten Zustandsgröße.

$$x_n(k) = \hat{x}_n(k) - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{g}_i}{1 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k)} L(k) . \quad (8.64)$$

Eine Beschreibung der Zustandsfehler σ_i für $(i=1,2,\dots,n-1)$ ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (8.54) und (8.55) zu

$$\sigma_i(k) = \sum_{j=1}^i \hat{a}_j s(k) - \sum_{j=1}^i \hat{g}_j L(k) . \quad (8.65)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Berücksichtigt man nun noch den Zusammenhang (6.18), so entsteht aus dem obigen Ausdruck die endgültige Form zur Berechnung der Systemzustände.

$$x_i(k) = \hat{x}_i(k) + \left[\frac{\sum_{j=1}^i \hat{a}_j \sum_{i=1}^n \hat{g}_i}{1 + \sum_{i=1}^n \hat{f}_i - \hat{h}_i(k)} - \sum_{j=1}^i \hat{g}_j \right] L(k) . \quad (8.66)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

8.5 Beispiel für die Anwendung des adaptiven PS-Beobachters

8.5.1 Modellbeschreibung

Ausgehend von der kontinuierlichen Beschreibung des Druck-Spannungs-Wandlers (4.102) und (4.103), erhält man für eine gewählte Abtastperiode von $T = 0.6 \text{ s}$ und Transformation auf BNF die folgenden Differenzengleichungen:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (8.67)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) . \quad (8.68)$$

Mit den Systemparametern

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.301194 \\ a_2 &= -0.630258 \\ b_1 &= 0.133568 \\ b_2 &= 0.201900 \end{aligned} \quad (8.69)$$

und den Anfangswerten

$$\underline{x}(0) = \underline{0} . \quad (8.70)$$

8.5.2 Vorgabe der Eigenwerte des PS-Beobachters und Auslegung der $\underline{g}_d$ -Parameter

Stellvertretend für die durchgeführten Simulationen soll eine schrittoptimale Auslegung des PS-Beobachters dargestellt werden.

Nach Kapitel 8.4.2 ergibt sich das charakteristische Polynom

$$\det(z\underline{I} - \underline{P}_d) = z^3 + (\hat{f}_2 - 1)z^2 + (\hat{f}_1 - \hat{f}_2 + \hat{g}_2)z + \hat{g}_1 - \hat{f}_1, \quad (8.71)$$

sowie der Wertebereich der wählbaren Parameter $\hat{g}_1$ und $\hat{g}_2$.

$$\begin{aligned} 0 < \hat{g}_1 < 1 \\ \hat{g}_2 &= 1 - \hat{g}_1. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Für die Simulationen wurden folgende Werte gewählt:

$$\begin{aligned} \hat{g}_1 &= 0.5 \\ \hat{g}_2 &= 0.5. \end{aligned} \quad (8.73)$$

Demnach lautet die Systemmatrix $\hat{\underline{F}}_d$ der Beobachterdynamik (7.21)

$$\hat{\underline{F}}_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1.0 \end{bmatrix}. \quad (8.74)$$

Gemäß der Definition (7.2) läßt sich nun auch der Nominal-Parametervektor $\underline{p}^*$ angeben.

$$\underline{p}^* = [0.133568, 0.2019, 0.198806, 1.630258, 0.5, 0.5]^T. \quad (8.75)$$

8.5.3 Berechnung der Transformationsmatrizen T_j

Die zur Beschreibung des parametrisierten PS-Beobachters notwendigen $3n^2$ Variablen $\underline{\xi}_j$ ($j=1,2,\dots,3n$) erhält man mit Hilfe der Transformationsmatrizen T_j ($j=1,2,\dots,n$).

Eine analoge Vorgehensweise, wie für den kontinuierlichen Fall, liefert die nachfolgenden Transformationsmatrizen:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \hat{f}_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.76)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} -\hat{f}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.77)$$

Mit (7.23) - (7.25) kann nun unter Berücksichtigung von (7.8) die notwendige Beobachterdynamik $\underline{M}(k)$ realisiert werden.

8.5.4 Ermittlung der geschätzten Systemzustände $\tilde{\underline{x}}(k)$

Die geschätzten Zustandsgrößen des Systems $\tilde{\underline{x}}(k)$ ergeben sich mit

$$(8.1) \quad \tilde{\underline{x}}(k)' = \underline{M}(k) \tilde{\underline{p}}_d + \hat{F}_d^k \tilde{\underline{x}}(0)$$

wobei

$$(7.8) \quad \underline{M}(k) = [\underline{\xi}_1(k), \underline{\xi}_2(k), \dots, \underline{\xi}_{3n}(k)]$$

und

$$\tilde{p}_d(k) = [p_1(k) \dots p_4(k), p_5^*, p_6^*]^T.$$

$\tilde{p}_i(k)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) stellen die momentane Parameterschätzung dar. Eine Ermittlung der restlichen n Parameter (p_5^*, p_6^*) braucht nicht durchgeführt werden, da diese durch die Auslegungsvorschriften des Beobachters fest vorgegeben sind.

Simulationen wurden sowohl für den idealen Fall als auch mit gestörter Meßgröße $y_s(k)$ durchgeführt. Gewählt wurde eine Amplitude, die ca. 15% der maximalen Ausgangsgröße $y(k)$ entspricht.

Zur Rekonstruktion der Systemzustände $\underline{x}(k)$ kamen beide vorgestellten Verfahren zur Anwendung.

Für die erste Methode mußte die folgende Systemerweiterung durchgeführt werden:

$$(8.59) \quad \underline{z}_4(k+1) = \hat{\underline{F}}_d^T \underline{z}_4(k) + \underline{e}_n y_b(k) \quad \underline{z}_4(0) = \underline{0}.$$

Weiterhin die zur Realisierung von (7.8) notwendigen Lineartransformationen

$$(8.79) \quad \underline{\xi}_{j+n}'(k) = \underline{T}_j \underline{z}_4(k). \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Unter Berücksichtigung von (8.61) können die geschätzten Zustandsgrößen des Systems wie folgt bestimmt werden:

$$(8.62) \quad \hat{\underline{x}}'(k) = [\underline{\xi}_1'(k), \underline{\xi}_2'(k) \dots \underline{\xi}_{2n}'(k)] \tilde{p}_d(k) + \hat{\underline{F}}_d^k \hat{\underline{x}}(0).$$

Da zur Realisierung des zweiten Verfahrens keine dynamische Systemerweiterung notwendig ist, lassen sich die noch unbestimmten Zustandsgrößen mit Hilfe der Gleichungen (8.64) und (8.66) direkt berechnen.

Für das vorliegende Beispiel erhält man

$$x_1(k) = \hat{x}_1(k) + \left[\frac{\hat{a}_1 (\hat{g}_1 - \hat{g}_2)}{1 + (\hat{f}_1 - \hat{h}_1) + (\hat{f}_2 - \hat{h}_2)} - \hat{g}_1 \right] L(k) \quad (8.78)$$

$$x_2(k) = \hat{x}_2(k) - \left[\frac{\hat{g}_1 + \hat{g}_2}{1 + \hat{a}_1(k) + \hat{a}_2(k)} \right] L(k) . \quad (8.79)$$

Wird nun noch der "Forget-Faktor" entsprechend der Auslegungsvorschrift zu

$$q = 0.99$$

gewählt, kann das Adaptionsgesetz

$$(8.14) \quad \tilde{p}_d(k+1) = \tilde{p}_d(k) - 2 [2 \underline{R}(k)]^{-1} [\underline{r}(k) + \underline{R}(k) \tilde{p}_d(k)]$$

mit

$$(8.10) \quad \underline{r}(k+1) = q \underline{r}(k) + [\hat{\underline{C}}_d^T \hat{\underline{F}}_d^i \hat{\underline{x}}(0) - y(k)] \underline{z}(k)$$

sowie

$$(8.11) \quad \underline{R}(k+1) = q \underline{R}(k) + \underline{z}(k) \underline{z}^T(k)$$

realisiert werden.

8.5.5 Simulationsergebnisse

Die zur Realisierung des mathematischen Modells nach Kapitel 8.5 notwendigen Berechnungen wurden mit Hilfe eines selbst implementierten, interaktiven Programmpaketes auf dem Prozeßrechner PDP 11/45 des Fachbereiches durchgeführt.

Die nachfolgenden Diagramme stellen zunächst die Ergebnisse dar, die der adaptive PS-Beobachter im ungestörten Fall liefert. Die restlichen Funktionsverläufe zeigen das Verhalten bei gestörter Meßgröße $y_s(k)$.

Der zeitliche Verlauf der geschätzten Systemparameter (normiert) sowie der Zustandsfehler sind für eine schrittoptimale Auslegung der Beobachterdynamik in den Abbildungen 8.1 und 8.2 dargestellt. Anschaulich ist zu erkennen, daß bis zum Erreichen der Regularität von $\underline{R}(k)$ die Parameteradaption mit $\underline{G}(k) = \underline{0}$ überbrückt und nach einem weiteren Abtastschritt die exakten Werte erreicht werden. Zum gleichen Zeitpunkt wird der Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ präzise ermittelt.

Die graphischen Darstellungen 8.3, 8.4 und 8.5 zeigen das Systemverhalten des Beobachters bei sprungförmiger Störung des Ausgangs des Systems. Auch hier wird deutlich, daß das vorgestellte Entwurfsverfahren dazu in der Lage ist, die oben erwähnte Störung zu kompensieren.

Hier zeigt es sich, daß die Bestimmung der Systemzustände mit Hilfe der ersten Methode etwas bessere Ergebnisse liefert, was sich in einer kürzeren Einschwingzeit bemerkbar macht. Dieser Vorteil geht jedoch zu Lasten der Amplitude des Zustandsfehlers.

Abschließend ist in Bild 8.6 eine nach Kapitel 8.3 geforderte Eingangsgröße wiedergegeben. Es handelt sich um die Funktion $u(k) = 5.0 \sin(k * T) + 5.0 \sin(2.5 * k * T)$.

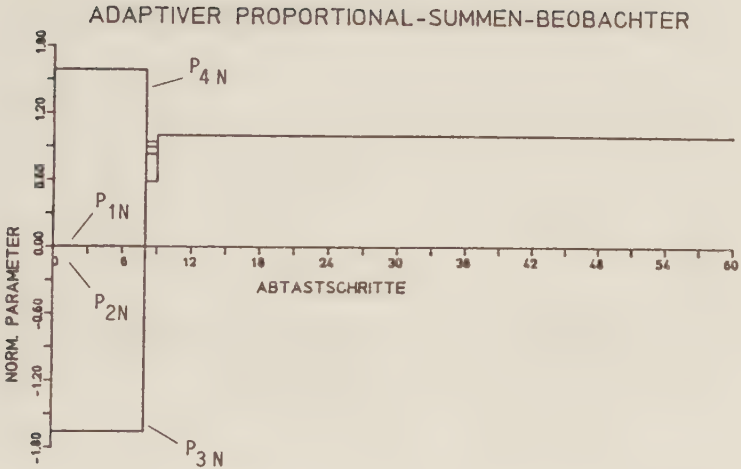


Bild 8.1 Normierte Parameter bei einem schrittoptimal ausgelegten adapt. PS-Beobachter

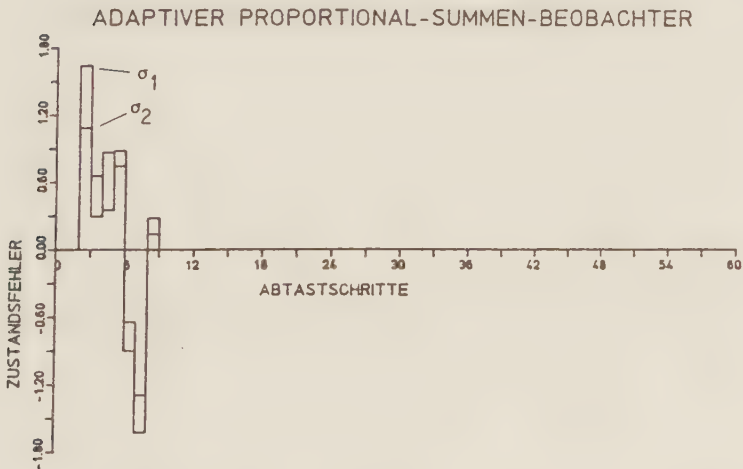


Bild 8.2 Zustandsfehler bei einem schrittoptimal ausgelegten adapt. PS-Beobachter

ADAPTIVER PROPORTIONAL-SUMMEN-BEOBACHTER

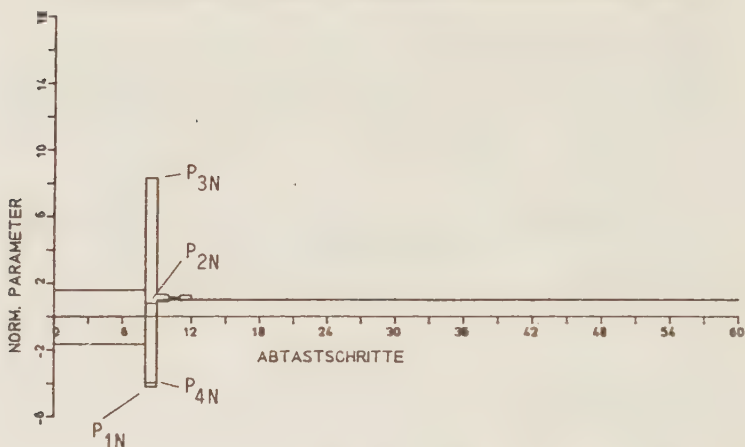


Bild 8.3 Normierte Parameter bei einem schrittoptimal ausgelegten adapt. PS-Beobachter mit gestörter Meßgröße $y_s(k)$

ADAPTIVER PROPORTIONAL-SUMMEN-BEOBACHTER

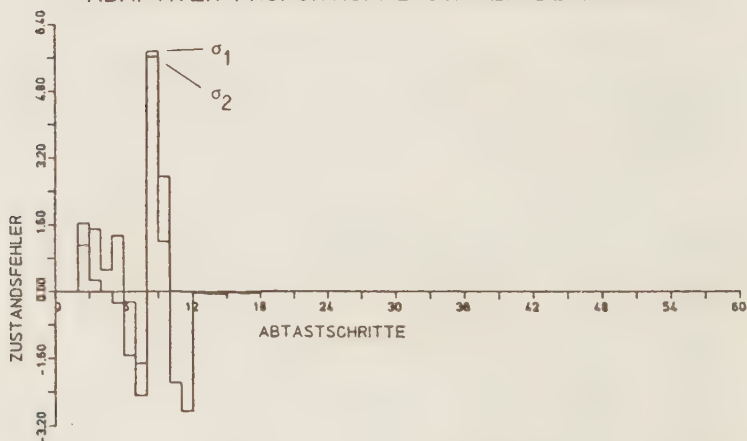


Bild 8.4 Zustandsfehler bei einem schrittoptimal ausgelegten adapt. PS-Beobachter mit gestörter Meßgröße $y_s(k)$ (2. Methode)

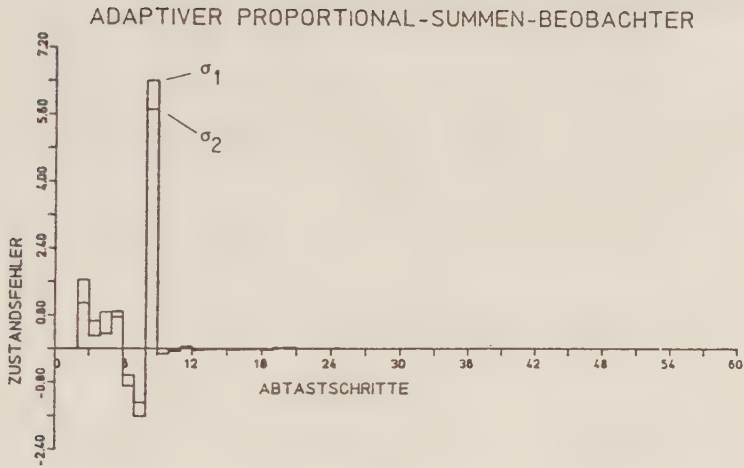


Bild 8.5 Zustandsfehler bei einem schrittoptimal ausgelegten adapt. PS-B Beobachter mit gestörter Meßgröße $y_s(k)$ (1. Methode)

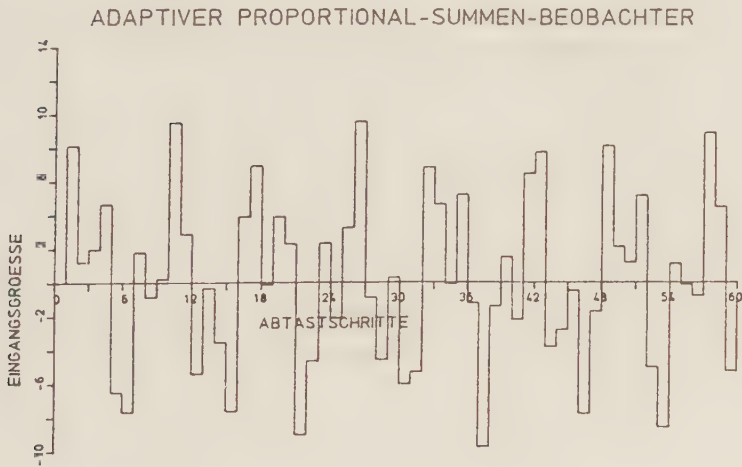


Bild 8.6 Eingangsgröße $u(k) = 5.0 \sin(k * T) + 5.0 \sin(2.5 * k * T)$

9. Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das technisch häufig auftretende Problem, die Systemparameter und Zustandsgrößen linearer zeitinvarianter Systeme n -ter Ordnung mit Hilfe eines adaptiven Beobachters "on-line" zu ermitteln.

Der Einsatz adaptiver Modelle wird auch in solchen Fällen notwendig, wo die Systemparameter "leicht" zeitvariant sind, und eine dynamische bzw. stationäre Beeinflussung des Systems mit einer festen Reglerauslegung nicht möglich ist.

Aus der Vielzahl der bisher zu diesem Thema erschienenen Veröffentlichungen wurde ein spezielles, kontinuierliches Verfahren nach Kreisselmeier als Ausgangslage gewählt. Diese parametrische Darstellungsform bietet u. a. den Vorteil der Trennung von Beobachterdynamik und Adaptionprozeß, so daß eine Verknüpfung mit einem erweiterten Kalmanbeobachter, dem sog. PI-Beobachter, möglich wurde.

Nach der Formulierung eines geeigneten Fehlerkriteriums, sowie Bildung eines passenden Adaptionsgesetzes, wurde zunächst das Verhalten beim idealen, d. h. ungestörten Fall behandelt.

Durch die Vergrößerung der Beobachterdynamik und die damit verbundenen Freiheiten in der Dimensionierung des zusätzlichen Rückkopplungsvektors $\underline{g}$, ist eine Auslegung des dynamischen Verhaltens hinsichtlich der Parameter- bzw. Zustandsfehler möglich, das dem oben erwähnten Verfahren entspricht.

Ein besseres Konvergenzverhalten konnte bei einer speziellen Klasse von Strecken (Systeme mit integralem Verhalten und zwei Arbeitspunkten) erzielt werden.

Da beide Verfahren eine spezielle Eingangsgröße $u(t)$ während des Adaptionvorgangs benötigen, wurde das Erkennen einer unzureichenden Anregung der Beobachterdynamik und die damit verbundene fehlerhafte Parameteradaption untersucht.

Durchgeführte Simulationen haben ergeben, daß mit der zusätzlichen Zustandsgröße $L(t)$ eine ungenügende Anregung nachgewiesen werden kann, so daß mit deren Hilfe die Einspeisung eines zusätzlichen Signals zur Sicherstellung der notwendigen Dynamik möglich ist.

Durch eine mathematische bzw. dynamische Modellerweiterung konnte das Systemverhalten bei einer speziellen Klasse deterministischer Störungen verbessert werden.

Hierzu wurden zwei Verfahren vorgestellt, die eine Schätzung und Kompensation der anliegenden Störung für den eingeschwungenen Zustand ermöglichen.

Die theoretischen Lösungsvarianten wurden durch Simulationen an einem praktischen Beispiel dargestellt.

Da eine reale Ausführung des kontinuierlichen adaptiven Beobachters auf Grund der extremen Anzahl von Integratoren und Vierquadranten-Multiplizierern aus wirtschaftlichen und technischen Gründen kaum durchführbar ist, wurde für eine konkrete Realisierung mittels Prozeßrechner eine Diskretisierung des mathematischen Modells unumgänglich.

Somit konnte auch eine schrittoptimale Lösung durch entsprechende Auslegung der wählbaren Beobachterparameter angegeben werden.

Die heute verfügbare Rechnergeneration dürfte auch in Bezug auf Rechengeschwindigkeit und -genauigkeit dazu in der Lage sein, die erweiterte Beobachterdynamik und den damit verbundenen Realisierungsaufwand im praktischen Einsatz zu bewältigen.

10. Literaturverzeichnis

- / 1 / Ackermann, J.: Abtastregelung. Springer-Verlag, Berlin 1972.
- / 2 / Anderson, B. D. O.: Adaptive identification of multiple-input multiple- output plants. IEEE Conf. Decision and Control, 1974, pp. 273 - 281.
- / 3 / Aoki, M.: Introduction to optimization techniques, Macmillan Company, New York 1971.
- / 4 / Bimbirekov, B. L.: An astatic observer with constant unobservable disturbance compensation. Automation an Remote Contr., Vol. 41, Dec. 1980, pp. 1669 - 1676.
- / 5 / Canterakis, N.: Vergleich zweier adaptiver Beobachter an einem dynamischen Modell eines Brückenkranes. Diplomarbeit am Institut für Meß- und Regelungstechnik, Universität (TH) Karlsruhe 1978.
- / 6 / Caroll, R. L., Lindorff, D. P.: An adaptive observer for single-input single-output linear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-18, Oct. 1973, pp. 428 - 435.
- / 7 / Courant, R.: Differential und Integralrechnung. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1972.
- / 8 / Eykhoff, P.: System Identification. John Wiley & Sons, London 1974.
- / 9 / Hang, C. C.: A new form of stable adaptive observer, IEEE Trans. Autom. Contr., AC-21, no. 4, 1976, pp. 544 - 547.

- / 10 / Hartmann, I.: Zeitdiskrete Systeme. Technische Universität Berlin, 1978.
- / 11 / Hartmann, I.: Digitale Regelkreise. Technische Universität Berlin, 1982.
- / 12 / Haupt, O.: Differential- und Integralrechnung. Verlag Walter de Gruyter & Co, Berlin 1938.
- / 13 / Ichikawa, K.: Principle of Lüders-Narendra's adaptive observer. Int. J. Control, Vol. 31, 1980, pp. 351 - 365.
- / 14 / Kaczorek, T.: Proportional-integral observers for linear multivariable time-varying systems. Regelungstechnik 27, Heft 11, 1979, pp. 359 - 363.
- / 15 / Kaczorek, T.: Reduced-order proportional-integral observers for multivariable time-varying systems. Regelungstechnik 28, Heft 5, 1980, pp. 164 - 168.
- / 16 / Kreisselmeier, G.: Adaptive observers with exponential rate of convergence. IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC - 22, Feb. 1977, pp. 2 - 8.
- / 17 / Kreisselmeier, G.: The generation of adaptive law structures for globally convergent adaptive observers. IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC - 24, June 1979, pp. 510 - 512.
- / 18 / Kreisselmeier, G., Narendra, K. S.: Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances. IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC - 27, Dec. 1982, pp. 1169 - 1175.
- / 19 / Kudva, P., Narendra, K. S.: Synthesis of an adaptive observer using Lyapunov's direct method. Int. J. Control, Vol. 18, 1973, pp. 1201 - 1210.

- / 20 / Landau, Y. D.: Adaptive Control. Marcel Dekker, Inc. New York, 1980.
- / 21 / Landgraf, Chr., Schneider, G.: Elemente der Regelungstechnik. Springer-Verlag, Berlin 1970.
- / 22 / Lion, P. M.: Rapid identification of linear and non-linear systems. AIAA J., Vol. 5, 1967, pp. 1835 - 1842.
- / 23 / Ludyk, G.: Theorie dynamischer Systeme. Elitera-Verlag, Berlin 1977.
- / 24 / Lüders, G., Narendra, K. S.: An adaptive observer and identifier for a linear system. IEEE Trans. Autom. Contr., AC - 28, no. 5, Oct. 1973, pp. 496 - 499.
- / 25 / Lüders, G., Narendra, K. S.: A new canonical form for an adaptive observer. IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC - 19, Apr. 1974, pp. 117 - 119.
- / 26 / Lüders, G., Narendra, K. S.: Stable adaptive schemes for a state estimation and identification of linear systems. IEEE Trans. Autom. Contr., AC - 19, no. 6, Dec. 1974, pp. 841 - 847.
- / 27 / Mansour, M.: Die Stabilität linearer Abtastsysteme und die zweite Methode von Ljapunov. Regelungstechnik, Nr. 13, 1965, pp. 592 - 596.
- / 28 / Mendel, J. M.: Discrete Techniques of Parameter Estimation, Marcel Dekker, New York, 1973.
- / 29 / Suhl, A., Schubert, P. J.: Vergleich zwischen Kalman- und PI-Beobachter, Diplomarbeit, Universität Bremen 1981.

- / 30 / Suzuki, T., Nakamura, T., Koga, M.: Discrete adaptive observer with fast convergence. Int. J. Contr., Vol 31, Dec. 1980, pp. 1107 - 1119.
- / 31 / Wöhlke, W.: Optimaler zeitdiskreter adaptiver Beobachter. Diplomarbeit, Universität Bremen 1983.
- / 32 / Zurmühl, R.: Matrizen. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1964.
- / 33 / Zypkin, J. S.: Theorie der Impulssysteme. Moskau: Staatl. Verlag für physikalisch-mathematische Literatur 1958.
- / 34 / SCLS IV Operating System BS 3000. Language Description, User's Guide. Version 1, Dec. 1979.

11. Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Abkürzungen

a_i	Konstante
$\underline{A}$	Systemmatrix des Systems
$\hat{\underline{A}}$	Systemmatrix des Beobachters
b_i	Konstante
$\underline{b}$	Eingangsvektor des Systems
$\hat{\underline{b}}$	Eingangsvektor des Beobachters
$\underline{c}$	Ausgangsvektor des Systems
$\hat{\underline{c}}$	Ausgangsvektor des Beobachters
E	Fehlerkriterium
$\hat{f}_i$	Konstante
$\hat{\underline{F}}$	Systemmatrix des Beobachters
$\hat{\underline{g}}$	Rückkopplungsvektor
$\underline{G}$	Verstärkungsmatrix
$\hat{\underline{h}}$	Rückkopplungsvektor
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
J	Fehlerkriterium
k	Verstärkungsfaktor
L	Ausgangsgröße des zusätzlichen Integrators
$\underline{M}$	Dynamikmatrix
n	Systemordnung
$\underline{O}$	Nullmatrix
$\underline{p}$	Parametervektor
$\underline{p}^*$	Nominalparametervektor
$\hat{\underline{p}}$	Schätzvektor

<u>P</u>	Systemmatrix des Beobachters
q	Konstante
<u>r</u>	Zustandsvektor des Adaptionprozesses
<u>R</u>	Matrix des Adaptionprozesses
s	Störgröße
t	Zeit
<u>T</u>	Transformationsmatrix
u	Eingangsgröße
W	Ljapunow-Funktion
<u>x</u>	Zustandsvektor des Systems
<u>$\hat{x}$</u>	Zustandsvektor des Beobachters
<u>$\tilde{x}$</u>	Schätzvektor
y	Ausgangsgröße des Systems
<u>$\hat{y}$</u>	Ausgangsgröße des Beobachters
<u>$\tilde{y}$</u>	Schätzgröße
<u>z</u>	Zustandsvektor
α	Koeffizient
<u>γ</u>	Fehlervektor
δ	Konstante
<u>δA</u>	Differenzmatrix
<u>δb</u>	Differenzvektor
<u>Δp</u>	Parameterfehlervektor
<u>$\tilde{\Delta p}$</u>	Schätzvektor
ϵ	Konstante
η	Ausgangsfehler

λ_i	Eigenwert
$\underline{\xi}$	Zustandsvektor
σ_e	Sprungfunktion
$\underline{\sigma}$	Zustandsfehlervektor
φ_{ij}	Matrixelement
$\underline{\Phi}$	Transitionsmatrix
$\underline{\Phi'}$	Transitionsmatrix

Indizes

*	Nominalwerte
d	zeitdiskret
~	Beobachtergrößen
~	Schätzgrößen

12. Anhang

Satz 3.1

Wenn $\underline{\hat{F}}$ in Beobachtungsnormalform vorliegt, dann ist

$$(\underline{sI} - \underline{\hat{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n = \frac{1}{\det(\underline{sI} - \underline{\hat{F}})} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (12.1)$$

($\underline{e}_n$ bezeichnet den n-ten Einheitsvektor)

Beweis

$$(\underline{sI} - \underline{\hat{F}}^T) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & & \vdots \\ 0 & \cdot & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & -1 \\ \hat{f}_1 & \hat{f}_2 & \dots & \dots & s + \hat{f}_n \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

$$(\underline{sI} - \underline{\hat{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & & \vdots \\ 0 & \cdot & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & -1 \\ \hat{f}_1 & \hat{f}_2 & \dots & \dots & s + \hat{f}_n \end{bmatrix}^{-1} \underline{e}_n \quad (12.3)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \star & \dots & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \star & \dots & \star \\ 1 & s & \dots & s^{n-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\det(\underline{sI} - \underline{\hat{F}})} \quad (12.4)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} * & . & . & . & * & 1 \\ . & & & & . & s \\ . & & & & . & . \\ * & & & * & s^{n-1} & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\det(s\underline{I} - \underline{\hat{F}})} \quad (12.5)$$

$$(s\underline{I} - \underline{\hat{F}})^{-1} \underline{e}_n = \frac{1}{\det(s\underline{I} - \underline{\hat{F}})} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ . \\ . \\ s^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (12.6)$$

Satz 3.2

Wenn $\underline{\hat{F}}$ in Beobachtungsnormalform vorliegt, dann ist

$$(s\underline{I} - \underline{\hat{F}})^{-1} \underline{e}_i = \underline{I}_i (s\underline{I} - \underline{\hat{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n. \quad (12.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Beweis

$$(s\underline{I} - \underline{\hat{F}})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\underline{I} - \underline{\hat{F}})}{\det(s\underline{I} - \underline{\hat{F}})} = \frac{[\underline{\text{adj}}_1; \underline{\text{adj}}_2; \dots; \underline{\text{adj}}_n]}{\det(s\underline{I} - \underline{\hat{F}})}, \quad (12.8)$$

wobei $\underline{\text{adj}}_i$ Spaltenvektoren mit Polynomen des Grades höchstens $n-1$ als Koeffizienten (wenn $\underline{\hat{F}}$ eine $n \times n$ Matrix ist).

Somit läßt sich der Spaltenvektor $\underline{\text{adj}}_i$ auch wie folgt darstellen:

$$\underline{\text{adj}}_i = \underline{I}_i \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

$$\frac{\underline{\text{adj}}_i}{\det(s\underline{I} - \hat{\underline{F}})} = \frac{\underline{I}_i \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{n-1} \end{bmatrix}}{\det(s\underline{I} - \hat{\underline{F}})} = \frac{\text{adj}(s\underline{I} - \hat{\underline{F}}) \underline{e}_i}{\det(s\underline{I} - \hat{\underline{F}})} = (s\underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \underline{e}_i$$

$$\frac{\underline{I}_i \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{n-1} \end{bmatrix}}{\det(s\underline{I} - \hat{\underline{F}})} = (s\underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \underline{e}_i. \quad (12.10)$$

Unter Berücksichtigung von Satz 3.1 erhält man:

$$\underline{I}_i (s\underline{I} - \hat{\underline{F}}^T)^{-1} \underline{e}_n = (s\underline{I} - \hat{\underline{F}})^{-1} \underline{e}_i. \quad (12.11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

